Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 18.05.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	11	8	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 25.05.2018 ☐ 28.05.2018

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie nachfolgende voneinander unabhängige Teilaufgaben: **11 P.|**

   a) Gegeben ist das nichtlineare, zeitkontinuierliche System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_1(\cos(x_3) - 1) \\ -x_2 + x_3 + u^2 \\ vu + ux_3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} (x_1^2 - x_3)u \\ x_2 \end{bmatrix}$$

   mit den beiden Eingangsgrößen u und v.

      i. Berechnen Sie die Trajektorie (Lösung) des Systems für $u(t) = 0$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}(t = 0) = [x_{1,0}\ x_{2,0}\ 0]^{\mathrm{T}}$. 2.5 P.|

      ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$, v_R des Systems für $u_R = 0$. 1.5 P.|

      iii. Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0\ \pi/2\ \pi/2]^{\mathrm{T}}$, $u_R = 0$, $v_R = 2$ und geben Sie das linearisierte System an. 2 P.|

   b) Betrachten Sie das lineare, zeitinvariante System der Form **4 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

   mit der Transitionsmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ 0 & -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

   und dem Eingangsvektor $\mathbf{b} = [1\ 2\ 0]^{\mathrm{T}}$.

      i. Berechnen Sie das zugehörige Abtastsystem mit der Abtastzeit $T_a = 2\,\mathrm{s}$ und geben Sie dieses an. Geben Sie außerdem die Berechnungsvorschrift der allgemeinen Lösung $\mathbf{x}_k$ des Abtastsystems an. 2 P.|

      ii. Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des zeitkontinuierlichen Systems für $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0}\ x_{2,0}\ 0]^{\mathrm{T}}$ und $u(t) = 0$. 0.5 P.|

      iii. Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}_k$ des zeitdiskreten Systems für $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0}\ x_{2,0}\ 0]^{\mathrm{T}}$ und $u_k = 0$. Vergleichen Sie diese mit der Lösung $\mathbf{x}(t)$ des zeitkontinuierlichen Systems aus Punkt ii. Ist die Abtastzeit $T_a = 2\,\mathrm{s}$ für das System richtig gewählt? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! 1.5 P.|

   c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Jede Ruhelage $\mathbf{x}_R \neq \mathbf{0}$ eines Abtastsystems der Form $\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}_k$ entspricht einem Rechtseigenvektor der Matrix $\boldsymbol{\Phi}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$. **1 P.|**

2. Bearbeiten Sie nachfolgende voneinander unabhängige Teilaufgaben: **11 P.**|

a) Betrachten Sie den zeitkontinuierlichen Regelkreis in Abbildung 1. **4 P.**|

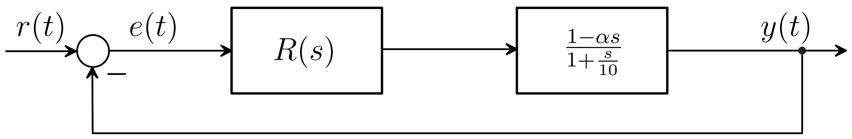

Abbildung 1: Regelkreis mit zeitkontinuierlichem Regler.

Die Reglerübertragungsfuktion wird im Weiteren als

$$R(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

gewählt.

i. Berechnen Sie die Fehlerübertragungsfunktion $T_{r,e}(s)$. 1 P.|

ii. Berechnen Sie für $\alpha = 0$ und $r(t) = \sin(t)$ den Regelfehler $e(t)$ im eingeschwungenen Zustand. 1 P.|

iii. Für welche Werte von α ist der geschlossene Kreis BIBO-stabil? 2 P.|

b) In diesem Unterpunkt wird der Abtastregelkreis in Abbildung 2 untersucht. **4 P.**|

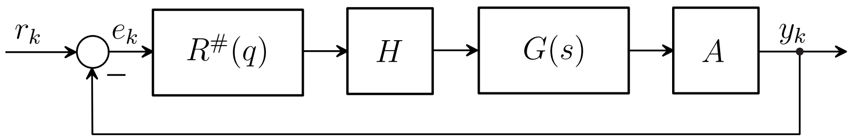

Abbildung 2: Abtastregelkreis.

Die q-Übertragungsfunktion der Strecke ist (näherungsweise) durch

$$G^{\#}(q) = 27\frac{1+(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})q}{(3\sqrt{3}+q)^2}$$

gegeben. Entwerfen Sie für das obige System einen geeigneten Regler $R^{\#}(q)$ mithilfe des Frequenzkennlinien-Verfahrens so, dass der geschlossene Regelkreis die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Anstiegszeit: $t_r = 0.4\,\mathrm{s}$
- Überschwingen: $ü = 10\,\%$
- Bleibende Regelabweichung: $e_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} e_k|_{r_k=(1^k)} = 0$

c) Gegeben ist folgende q-Reglerübertragungsfunktion **3 P.**|

$$R^{\#}(q) = \frac{6T_a q}{1+\frac{11}{2}T_a q}$$

mit der allgemeinen Abtastzeit T_a.

i. Berechnen Sie die zugehörige z-Reglerübertragungsfunktion $R(z)$. 1 P.|

ii. Stellen Sie $R(z)$ als zeitdiskretes System im Zustandsraum dar. 2 P.|

3. Bearbeiten Sie die folgenden Unterpunkte. Die Punkte sind unabhängig voneinander lösbar. **8 P.|**

a) Betrachten Sie ein LTI-System der Form **2 P.|**

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\
y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du
\end{aligned}
$$

mit $\dim(\mathbf{x}) = 2$, von dem die folgenden Zeitverläufe bekannt sind:

- $y_1(t) = 5\mathrm{e}^t\cos(t) - \mathrm{e}^t\sin(t)$ für $\mathbf{x}_1(0) = [1\ -4]^{\mathrm{T}}$ und $u_1(t) = 0$
- $y_2(t) = -(1+3\mathrm{e}^t)\cos(t) - 3\sin(t)$ für $\mathbf{x}_2(0) = [2\ 1]^{\mathrm{T}}$ und $u_2(t) = -5\cos(t)$
- $y_3(t) = (1+4\mathrm{e}^t)\cos(t) + (3-2\mathrm{e}^t)\sin(t)$ für $\mathbf{x}_3(0) = [0\ 0]^{\mathrm{T}}$ und $u_3(t) = 5\cos(t)$

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ für $\mathbf{x}(0) = [3\ -3]^{\mathrm{T}}$ und $u(t) = 5\cos(t)$.

b) Gegeben ist die Transitionsmatrix **3 P.|**

$$
\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t)+\cos(t) & -\sin(t) & -\frac{1}{2}\sin(t) \\ \sin(t)-\cos(t)+\mathrm{e}^{3t} & \cos(t) & \frac{1}{2}\cos(t)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} \\ 2\sin(t)+2\cos(t)-2\mathrm{e}^{3t} & -2\sin(t) & \mathrm{e}^{3t}-\sin(t) \end{bmatrix}.
$$

i. Berechnen Sie zur Transitionsmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$ die zugehörigen Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und die Inverse $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$. 2 P.|

ii. Geben Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ an. 1 P.|

c) Von einem LTI-System **3 P.|**

$$
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u
$$

mit $\dim(\mathbf{x}) = 3$ und $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = 2$ ist bekannt, dass $\mathbf{x}_{0,1} = [4\ 4\ -2]^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{x}_{0,2} = [0\ 3\ -3]^{\mathrm{T}}$ Ruhelagen für $u(t) = u_0 = 2$ sind.
Geben Sie falls möglich eine Stellgröße $u(t) = \bar{u}_0$ so an, dass $\bar{\mathbf{x}}_0 = [-2\ 4\ -5]^{\mathrm{T}}$ eine Ruhelage ist, oder argumentieren Sie, warum dies nicht möglich ist. Begründen Sie Ihre Vorgangsweise ausführlich!

4. Gegeben ist das lineare, zeitinvariante Abtastsystem der Form **10 P.|**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\
y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k.
\end{aligned}
$$

a) Ist das System vollständig erreichbar? **1 P.|**

b) Kann ein Simulator zur Zustandsschätzung eingesetzt werden? Zeigen Sie, dass ein vollständiger Luenberger Beobachter zur Schätzung des Zustandsvektors $\mathbf{x}$ eingesetzt werden kann. **2 P.|**

c) Für das System ist ein Zustandsregler der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + r_k$ mit $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = [-2 \; -3/4]$ gegeben. Überprüfen Sie, ob dieser das System asymptotisch stabilisieren kann. Geben Sie den Wert $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$ des geschlossenen Regelkreises zur Eingangsfolge $(r_k) = r_0(1^k)$ an. **2 P.|**

d) Berechnen Sie den Rückführungsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ eines vollständigen Luenberger Beobachters so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei $\lambda_{1,2} = \{-1/2 \pm \mathrm{I}1/2\}$ platziert werden und geben Sie die Systemgleichungen des Beobachters an. **2.5 P.|**

e) Zeigen Sie allgemein die Gültigkeit des Separationsprinzips für lineare, zeitinvariante Abtastsysteme. **2.5 P.|**