Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 18.05.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	11	8	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 25.05.2018 ☐ 28.05.2018

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie nachfolgende voneinander unabhängige Teilaufgaben: **11 P.**|

a) Gegeben ist das nichtlineare, zeitkontinuierliche System **6 P.**|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_1(\cos(x_3) - 1) \\ -x_2 + x_3 + u^2 \\ vu + ux_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} (x_1^2 - x_3)u \\ x_2 \end{bmatrix}$$

mit den beiden Eingangsgrößen u und v.

i. Berechnen Sie die Trajektorie (Lösung) des Systems für $u(t) = 0$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}(t = 0) = [x_{1,0} \; x_{2,0} \; 0]^{\mathrm{T}}$. 2.5 P.|

ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$, v_R des Systems für $u_R = 0$. 1.5 P.|

iii. Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0 \; \pi/2 \; \pi/2]^{\mathrm{T}}$, $u_R = 0$, $v_R = 2$ und geben Sie das linearisierte System an. 2 P.|

b) Betrachten Sie das lineare, zeitinvariante System der Form **4 P.**|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

mit der Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ 0 & -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

und dem Eingangsvektor $\mathbf{b} = [1 \; 2 \; 0]^{\mathrm{T}}$.

i. Berechnen Sie das zugehörige Abtastsystem mit der Abtastzeit $T_a = 2\,\mathrm{s}$ und geben Sie dieses an. Geben Sie außerdem die Berechnungsvorschrift der allgemeinen Lösung $\mathbf{x}_k$ des Abtastsystems an. 2 P.|

ii. Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des zeitkontinuierlichen Systems für $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0} \; x_{2,0} \; 0]^{\mathrm{T}}$ und $u(t) = 0$. 0.5 P.|

iii. Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}_k$ des zeitdiskreten Systems für $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0} \; x_{2,0} \; 0]^{\mathrm{T}}$ und $u_k = 0$. Vergleichen Sie diese mit der Lösung $\mathbf{x}(t)$ des zeitkontinuierlichen Systems aus Punkt ii. Ist die Abtastzeit $T_a = 2\,\mathrm{s}$ für das System richtig gewählt? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! 1.5 P.|

c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Jede Ruhelage $\mathbf{x}_R \neq \mathbf{0}$ eines Abtastsystems der Form $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k$ entspricht einem Rechtseigenvektor der Matrix $\mathbf{\Phi}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$. **1 P.**|

Lösung:

a) i. Die Trajektorie lautet

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{1,0}\exp(x_{2,0}(1-\exp(-t))) \\ x_{2,0}\exp(-t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Die Ruhelagen sind $\{x_{1,R} = 0,\ x_{2,R} = x_{3,R} \in \mathbb{R}\ ,\ v_R \in \mathbb{R}\}$ und $\{x_{1,R} \in \mathbb{R},$ $x_{2,R} = x_{3,R} = 0\ ,\ v_R \in \mathbb{R}\}$

iii. Das linearisierte System lautet

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \pi/2-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2+\pi/2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}.$$

b) i. Das Abtastsystem lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \exp(-4) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} (1-\exp(-4))/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}_k.$$

Die allgemeine Lösung wird in der Form

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}^k\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}^{k-i-1}\Gamma u_i$$

berechnet.

ii. Die Lösung lautet

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t)x_{1,0} \\ \cos(\pi t)x_{2,0} \\ -\sin(\pi t)x_{2,0} \end{bmatrix}$$

iii. Die Lösung lautet

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \exp(-4k)x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Oszillation mit der Frequenz $\omega_0 = \pi$ ist nicht mehr in der Lösung des zeitdiskreten Systems sichtbar, da die Abtastfrequenz $\omega_a = \pi$ gleich der Eigenfrequenz des Systems $\omega_0 = \pi$ gewählt wurde.

c) Die Gleichung zur Berechnung der Ruhelage $\mathbf{x}_R \neq \mathbf{0}$ entspricht der Gleichung zur Bestimmung des zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörenden Eigenvektors der Matrix $\mathbf{\Phi}$

$$(\mathbf{\Phi} - 1\mathbf{E})\mathbf{x}_R = \mathbf{0}.$$

2. Bearbeiten Sie nachfolgende voneinander unabhängige Teilaufgaben: **11 P.|**

a) Betrachten Sie den zeitkontinuierlichen Regelkreis in Abbildung 1. **4 P.|**

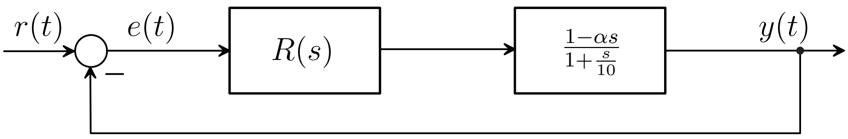

Abbildung 1: Regelkreis mit zeitkontinuierlichem Regler.

Die Reglerübertragungsfuktion wird im Weiteren als

$$R(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

gewählt.

i. Berechnen Sie die Fehlerübertragungsfunktion $T_{r,e}(s)$. 1 P.|

ii. Berechnen Sie für $\alpha = 0$ und $r(t) = \sin(t)$ den Regelfehler $e(t)$ im eingeschwungenen Zustand. 1 P.|

iii. Für welche Werte von α ist der geschlossene Kreis BIBO-stabil? 2 P.|

b) In diesem Unterpunkt wird der Abtastregelkreis in Abbildung 2 untersucht. **4 P.|**

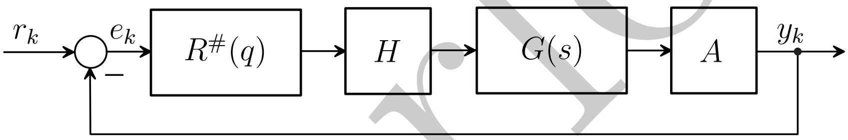

Abbildung 2: Abtastregelkreis.

Die q-Übertragungsfunktion der Strecke ist (näherungsweise) durch

$$G^{\#}(q) = 27\frac{1+(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})q}{(3\sqrt{3}+q)^2}$$

gegeben. Entwerfen Sie für das obige System einen geeigneten Regler $R^{\#}(q)$ mithilfe des Frequenzkennlinien-Verfahrens so, dass der geschlossene Regelkreis die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Anstiegszeit: $t_r = 0.4\,\mathrm{s}$
- Überschwingen: $ü = 10\,\%$
- Bleibende Regelabweichung: $e_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} e_k|_{r_k=(1^k)} = 0$

c) Gegeben ist folgende q-Reglerübertragungsfunktion **3 P.|**

$$R^{\#}(q) = \frac{6T_a q}{1+\frac{11}{2}T_a q}$$

mit der allgemeinen Abtastzeit T_a.

i. Berechnen Sie die zugehörige z-Reglerübertragungsfunktion $R(z)$. 1 P.|

ii. Stellen Sie $R(z)$ als zeitdiskretes System im Zustandsraum dar. 2 P.|

Lösung:

a) i. Die Fehlerübertragungsfunktion berechnet sich zu

$$T_{r,e}(s) = \frac{\frac{1}{10}s^3 + s^2 + \frac{1}{10}s + 1}{\frac{1}{10}s^3 + (1-\alpha)s^2 + \frac{11}{10}s + 1} \ .$$

ii. Im eingeschwungenen Zustand ergibt sich der Regelfehler $e(t) = 0$.

iii. Der geschlossene Kreis ist für $\alpha < \frac{10}{11}$ BIBO-stabil.

b) Die Forderung $e_\infty = 0$ gemeinsam mit einer notwendigen Phasenanhebung bei der gewünschten Durchtrittsfrequenzs führt auf die Wahl eines PI-Reglers

$$R^{\#}(q) = V_I \frac{1 + qT_I}{q} \ .$$

Aus den Anforderungen an den geschlossenen Kreis berechnen sich die Reglerparameter zu

$$T_I = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$$
$$V_I = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

c) i. Die z-Reglerübertragungsfunktion lautet

$$R(z) = 12\frac{z-1}{12z-10} \ .$$

ii. Eine mögliche Zustandsraumdarstellung von $R(z)$ ist durch

$$x_{k+1} = \frac{5}{6}x_k + \frac{1}{6}u_k$$
$$y_k = -x_k + u_k$$

gegeben.

3. Bearbeiten Sie die folgenden Unterpunkte. Die Punkte sind unabhängig voneinander lösbar. **8 P.|**

a) Betrachten Sie ein LTI-System der Form **2 P.|**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\\ y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

mit $\dim(\mathbf{x}) = 2$, von dem die folgenden Zeitverläufe bekannt sind:

- $y_1(t) = 5\mathrm{e}^t\cos(t) - \mathrm{e}^t\sin(t)$ für $\mathbf{x}_1(0) = [1\ -4]^{\mathrm{T}}$ und $u_1(t) = 0$
- $y_2(t) = -(1+3\mathrm{e}^t)\cos(t) - 3\sin(t)$ für $\mathbf{x}_2(0) = [2\ 1]^{\mathrm{T}}$ und $u_2(t) = -5\cos(t)$
- $y_3(t) = (1+4\mathrm{e}^t)\cos(t) + (3-2\mathrm{e}^t)\sin(t)$ für $\mathbf{x}_3(0) = [0\ 0]^{\mathrm{T}}$ und $u_3(t) = 5\cos(t)$

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ für $\mathbf{x}(0) = [3\ -3]^{\mathrm{T}}$ und $u(t) = 5\cos(t)$.

b) Gegeben ist die Transitionsmatrix **3 P.|**

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t)+\cos(t) & -\sin(t) & -\frac{1}{2}\sin(t) \\ \sin(t)-\cos(t)+\mathrm{e}^{3t} & \cos(t) & \frac{1}{2}\cos(t)-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} \\ 2\sin(t)+2\cos(t)-2\mathrm{e}^{3t} & -2\sin(t) & \mathrm{e}^{3t}-\sin(t) \end{bmatrix}.$$

i. Berechnen Sie zur Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ die zugehörigen Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und die Inverse $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$. 2 P.|

ii. Geben Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ an. 1 P.|

c) Von einem LTI-System **3 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

mit $\dim(\mathbf{x}) = 3$ und $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = 2$ ist bekannt, dass $\mathbf{x}_{0,1} = [4\ 4\ -2]^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{x}_{0,2} = [0\ 3\ -3]^{\mathrm{T}}$ Ruhelagen für $u(t) = u_0 = 2$ sind.
Geben Sie falls möglich eine Stellgröße $u(t) = \bar{u}_0$ so an, dass $\bar{\mathbf{x}}_0 = [-2\ 4\ -5]^{\mathrm{T}}$ eine Ruhelage ist, oder argumentieren Sie, warum dies nicht möglich ist. Begründen Sie Ihre Vorgangsweise ausführlich!

Lösung:

a) Für LTI-Systeme gilt das Superpositionsprinzip bezüglich der Anfangswerte als auch bezüglich der Eingangsgrößen. Aus der geeigneten Linearkombination der angegebenen Ausgangsgrößen folgt damit

$$y(t) = (1 + 10\mathrm{e}^{t})\cos(t) + (3 - 5\mathrm{e}^{t})\sin(t)$$

für $\mathbf{x}(0) = [3\ -3]^{\mathrm{T}}$ und $u(t) = 5\cos(t)$.

b) i. Aus den Eigenschaften der Transitionsmatrix folgt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) + \cos(t) & \sin(t) & \frac{1}{2}\sin(t) \\ -\sin(t) - \cos(t) + \mathrm{e}^{-3t} & \cos(t) & \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\ -2\sin(t) + 2\cos(t) - 2\mathrm{e}^{-3t} & 2\sin(t) & \mathrm{e}^{-3t} + \sin(t) \end{bmatrix} .$$

ii. Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ können direkt aus der Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ abgelesen werde und ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathrm{I} \\ \lambda_2 &= -\mathrm{I} \\ \lambda_3 &= 3\ . \end{aligned}$$

c) Aus der Linearkombination der Ruhelagen folgt $\bar{u}_0 = 3$.

4. Gegeben ist das lineare, zeitinvariante Abtastsystem der Form **10 P.**|

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\
y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k .
\end{aligned}
$$

a) Ist das System vollständig erreichbar? **1 P.**|

b) Kann ein Simulator zur Zustandsschätzung eingesetzt werden? Zeigen Sie, dass ein vollständiger Luenberger Beobachter zur Schätzung des Zustandsvektors $\mathbf{x}$ eingesetzt werden kann. **2 P.**|

c) Für das System ist ein Zustandsregler der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k + r_k$ mit $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = [-2 \ -3/4]$ gegeben. Überprüfen Sie, ob dieser das System asymptotisch stabilisieren kann. Geben Sie den Wert $\lim_{k \to \infty} y_k$ des geschlossenen Regelkreises zur Eingangsfolge $(r_k) = r_0(1^k)$ an. **2 P.**|

d) Berechnen Sie den Rückführungsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ eines vollständigen Luenberger Beobachters so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei $\lambda_{1,2} = \{-1/2 \pm \mathrm{I}1/2\}$ platziert werden und geben Sie die Systemgleichungen des Beobachters an. **2.5 P.**|

e) Zeigen Sie allgemein die Gültigkeit des Separationsprinzips für lineare, zeitinvariante Abtastsysteme. **2.5 P.**|

Lösung:

a) Das System ist vollständig erreichbar.

b) Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{\Phi}$ sind $\lambda_{1,2} = 3/2 \pm \mathrm{I}\sqrt{3}/2$. Da das System somit nicht asymptotisch stabil ist, kann kein Simulator verwendet werden. Da das System vollständig beobachtbar ist, kann ein vollständiger Luenberger Beobachter verwendet werden.

c) Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ sind $\lambda_{1,2} = 0.5$. Daher führt der Zustandsregler zu einem asymptotisch stabilen Regelkreis. Für den stationären Ausgang ergibt sich $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = -4r_0$.

d) Der Rückführungsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ lautet $\hat{\mathbf{k}} = [5.5 \;\, -4]$. Die Systemgleichungen des Beobachters lauten

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \left(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right)\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k - \hat{\mathbf{k}}y_k \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}_k.\end{aligned}$$

e) Mit dem Beobachtungsfehler $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ können die System- und Beobachtergleichungen in der Form

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{e}_{k+1}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_{ges}}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} r_k$$

angegeben werden. Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{\Phi}_{ges}$ sind die Eigenwerten von $\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$. Somit können der Zustandsregler und der Zustandsbeobachter unabhängig entworfen werden.