Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 13.07.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	11	9	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 23.07.2018 ☐ 24.07.2018

Viel Erfolg!

1. Die folgenden Aufgaben zu zeitdiskreten dynamischen Systemen können getrennt voneinander bearbeitet werden. 10 P.|

   a) Gegeben ist die Impulsantwort eines zeitdiskreten Systems mit der Systemordung $n = 3$. 6 P.|

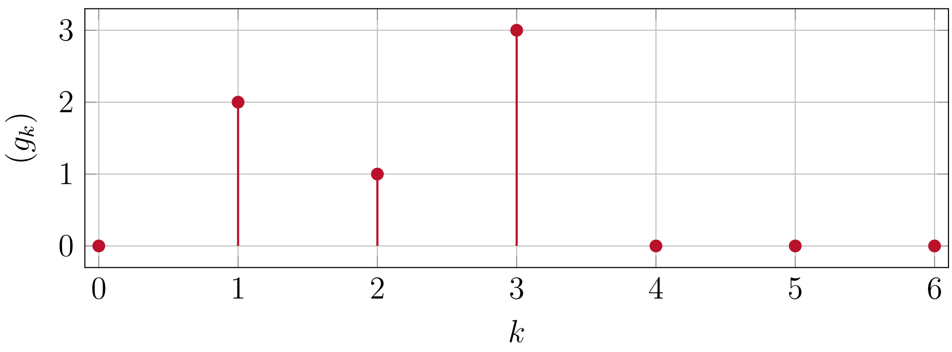

Abbildung 1: Impulsantwort.

      i. Bestimmen Sie die Markov-Parameter m_k und die Hankelmatrix $\mathbf{H}_d$ passend zu der in Abbbildung 1 dargestellten Impulsantwort. 3 P.|
      ii. Ist das System vollständig erreichbar und beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|
      iii. Ermitteln Sie die z-Übertragunsfunktion $G(z)$. 1 P.|
      iv. Geben Sie die zur Eingangsfolge $(u_k) = (1, 2, -2, 1, 0, 0, \ldots)$ zugehörige Ausgangsfolge (y_k) an. 1 P.|

   b) Betrachten Sie das zeitdiskrete LTI-System in Form der Differenzengleichung 4 P.|

$$y_k - 2y_{k-1} + \frac{1}{2}y_{k-2} = 2u_{k-1} - u_{k-2}.$$

      i. Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion der Differenzengleichung. 1 P.|
      ii. Berechnen Sie die stationäre Lösung (y_∞) der zeitdiskreten Strecke 1 P.|

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^3}$$

      für $(u_k) = (1^k)$.
      iii. Ermitteln Sie eine Minimalrealisierung der im vorgehenden Unterpunkt angegebenen z-Übertragungsfunktion $G(z)$. Geben Sie anschließend eine Folge (u_k) an, welche den Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$ von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ in $\mathbf{x}_3 = [1\ 0\ 0]^\mathrm{T}$ überführt. 2 P.|

Lösung:

a) i. $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_3 = 3$, $m_4 = 0$, $m_5 = 0$ und $\mathbf{H}_d = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ii. Ja, da $\det(\mathbf{H}_d) = -27$.

iii. $G(z) = \frac{2z^2+z+3}{z^3}$.

iv. $(g_k) = (0, 2, 1, 3, 0, \ldots)$,
$(u_k) = (1, 2, -2, 1, 0, \ldots)$ und somit
$(y_k) = (0, 2, 5, 1, 6, -5, 3, 0, \ldots)$.

b) i. $G(z) = \frac{2z-1}{z^2-2z+1/2}$.

ii. $y_\infty = 4$.

iii. $x_3 = [\Phi^2\Gamma \ \Phi\Gamma \ \Gamma][u_0 \ u_1 \ u_2]^{\mathrm{T}}$ und $(u_k) = (1, 0, 0)$.

2. Bearbeiten Sie die folgenden unabhängigen Teilaufgaben. 10 P.|

a) Es sei die Sprungantwort auf einen Einheitssprung, die Ortskurve und die Übertragungsfunktion 4 P.|

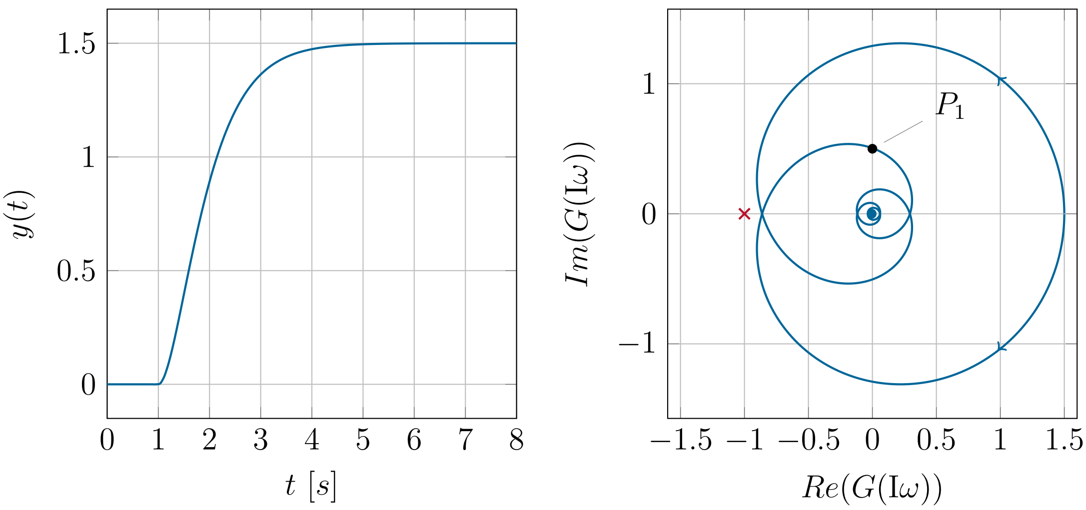

Abbildung 2: Sprungantwort und Ortskurve.

$$G(s) = \mathrm{e}^{-T_t s}\frac{V}{(s+a)^2}$$

eines LTI-Systems bekannt.

i. Bestimmen Sie die reellen Parameter T_t, V und a. Verwenden Sie hierfür die Sprungantwort und die Ortskurve aus Abbildung 2. Für den Punkt P_1 gilt $\omega_1 = \sqrt{8}$ und $|G(\mathrm{I}\omega_1)| = \frac{1}{2}$. 3 P.|

ii. Es soll ein P-Regler mit dem Proportionalitätsfaktor k_p eingesetzt werden. Beurteilen Sie für $k_p = 1$ anhand des Nyquist-Kriteriums die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. 1 P.|

b) Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System 6 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + u_k.$$

i. Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist. 1 P.|

ii. Entwerfen Sie einen vollständigen Zustandsbeobachter so, dass alle Eigenwerte des Fehlersystems bei $\frac{1}{2}$ liegen. 5 P.|

Lösung:

a) i.
- Die Totzeit kann direkt abgelesen werden $T_t = 1$.
- Für $\omega = 0$ folgt aus der Ortskurve $\frac{V}{a^2} = \frac{3}{2}$.
- Nachdem $|G(\mathrm{I}\omega_1)| = \frac{3}{2}\frac{a^2}{(a^2+\omega_1^2)} = \frac{1}{2}$, folgt $a = 2$ und $V = 6$.

   ii. Da $\Delta arg(1 + L(\mathrm{I}\omega)) = (2 - 2)\pi = 0$ beträgt, ist der geschlossenen Kreis für $k_p = 1$ stabil.

b) i. Das System ist in Beobachtbarkeitsnormalform gegeben.

   ii. $\hat{k} = \begin{bmatrix} 5/8 \\ -11/4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Die folgenden Aufgaben zu zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten dynamischen Systemen können getrennt voneinander bearbeitet werden. 11 P.|

   a) Gegeben ist das lineare zeitinvariante autonome System 4 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \mathbf{x} \, .$$

      i. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass das System asymptotisch stabil und nicht schwingungsfähig ist. Alle Eigenwerte der Dynamikmatrix sollen zusätzlich den selben Betrag besitzen. 1 P.|

      ii. Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$. Verwenden Sie dafür den numerischen Wert von a aus der vorherigen Aufgabe! 2.5 P.|

      iii. Berechnen Sie $\mathbf{x}(t \geq 0)$ für $\mathbf{x}(t = 0) = [x_{1,0} \; x_{2,0}]^{\mathrm{T}}$. 0.5 P.|

   b) Es wird das lineare zeitdiskrete System 2,5 P.|

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= [0 \;\; 2] \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

   betrachtet.

      i. Ist dieses System vollständig erreichbar? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

      ii. Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Abtastsystems. 1 P.|

      iii. Ist die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 0.5 P.|

   c) Gegeben ist das nichtlineare zeitkontinuierliche System 4.5 P.|

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^2 - w^2 \cos(u) \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1 x_2}{w} - 1 - \sin(u) \\ y &= \frac{3x_2}{x_1 + 1} \end{aligned}$$

   mit dem Zustand $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2]^{\mathrm{T}}$, dem Eingang u, dem Ausgang y und dem konstanten Skalar w.

      i. Berechnen Sie alle Ruhelagen dieses Systems für $u = 0$. 1 P.|

      ii. Linearisieren Sie das nichtlineare System um die Ruhelage mit positivem $x_{1,R}$ aus der vorherigen Aufgabe und geben Sie das Ergebnis in der Form $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$, $\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}$ an. 2 P.|

      iii. Bestimmen Sie w so, dass das System um die Ruhelage asymptotisch stabil ist und der Betrag des Realteils aller Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ 0.5 beträgt. 1.5 P.|

Lösung:

a) i. Es gibt 2 Lösungen für a: $a = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$ und $a = -4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3$

   ii. Mit $a = 0$:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}(1-t) & t\mathrm{e}^{-t} \\ -t\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t}(1+t) \end{bmatrix}$$

   Mit $a = -4$:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t}(1+t) & t\mathrm{e}^{-3t} \\ -t\mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-3t}(1-t) \end{bmatrix}$$

iii. Mit $a = 0$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}\Big((1-t)x_{1,0} + tx_{2,0}\Big) \\ \mathrm{e}^{-t}\Big((1-t)x_{2,0} - tx_{1,0}\Big) \end{bmatrix}$$

Mit $a = -4$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t}\Big((1+t)x_{1,0} + tx_{2,0}\Big) \\ \mathrm{e}^{-3t}\Big((1-t)x_{2,0} - tx_{1,0}\Big) \end{bmatrix}$$

b) i. Die Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1/4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ besitzt vollen Rang und daher ist das System vollständig erreichbar.

ii. $G(z) = \frac{2z+8}{z^2+z+0.5}$

iii. Die Pole von $G(z)$ lauten $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm I\frac{1}{2}$ und sind daher innerhalb vom Einheitskreis. Daher ist $G(z)$ BIBO-stabil.

c) i. $\mathbf{x}_{1R} = [1\ w]^T$, $\mathbf{x}_{2R} = [-1\ \ -w]^T$

ii. $\mathbf{b} = [0\ \ -1]^T$, $\mathbf{c}^T = [-\frac{3w}{4}\ \ -\frac{3}{2}]$ und $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2w \\ 1 & 1/w \end{bmatrix}$.

iii. Für $w = -1$ folgen die stabilen Eigenwerte zu $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm I\frac{\sqrt{7}}{2}$.

4. Die folgenden beiden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 9 P.|

a) Gegeben ist der geschlossene Regelkreis aus Abb. 3 mit der Dynamikmatrix 6 P.|

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} ,$$

dem Eingangsvektor

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ,$$

dem Ausgangsvektor

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und dem Zustandsregler

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 6 \end{bmatrix} .$$

Zusätzlich wird die zeitliche Ableitung des Ausgangs y mit der Verstärkung k_d zurückgeführt.

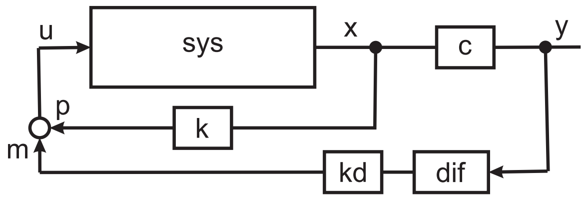

Abbildung 3: Geschlossener Regelkreis.

i. Bestimmen Sie die Dynamik des geschlossenen Kreises in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$. 3,5 P.|

ii. Geben Sie den Bereich von $k_d \in \mathbb{R}$ an, für welchen der geschlossene Kreis stabil ist. 2,5 P.|

b) Betrachtet wird das lineare zeitinvariante System 3 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} ,$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1\ x_2\ x_3]$ und dessen Anfangswert $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t=0) = [0\ 0\ 0]$. Bestimmen Sie den Eingang $u(t)$ für $t > 0$ so, dass die Ausgangstrajektorie zu $y(t) = \frac{t^2}{2}\sin(2t)$ folgt.
Hinweis: Die Lösung dieser Aufgabe soll im Zeitbereich erfolgen. Beachten Sie dafür die spezielle Struktur des Systems! Die Transitionsmatrix muss zur Lösung dieser Aufgabe **nicht** berechnet werden.

Lösung:

a) i. Da $y = x_1$ und $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$ gilt, folgt:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -13 & -7 + k_d & -3 \end{bmatrix}$$

ii. $k_d < \frac{8}{3}$ (mit Routh-Hurwitz lösbar)

b) $y = x_1$, $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$, $\ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3$ und $y^{(3)} = \dot{x}_3 = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 + u$.
$\dot{y} = t\sin(2t) + t^2\cos(2t)$
$\ddot{y} = \sin(2t) + 4t\cos(2t) - 2t^2\sin(2t)$
$y^{(3)} = 6\cos(2t) - 12t\sin(2t) - 4t^2\cos(2t)$
$\Rightarrow\ u = 4\sin(2t) + 6\cos(2t) - 10t\sin(2t) + 16t\cos(2t) - \frac{11}{2}t^2\sin(2t) - 2t^2\cos(2t)$