Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 28.09.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ Fr., 05.10.2018 ☐ Mo., 08.10.2018

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die folgenden Unterpunkte. 10 P.|

In diesem Beispiel soll eine kaskadierte Regelung für eine Ausgangsspannungsstabilisierung für einen einphasigen Buck-Converter, welcher in Abbildung 1 dargestellt ist, entworfen werden. Ein innerer Regelkreis ist für die Stromregelung und ein äußerer Regelkreis ist für die Spannungsstabilisierung zuständig.

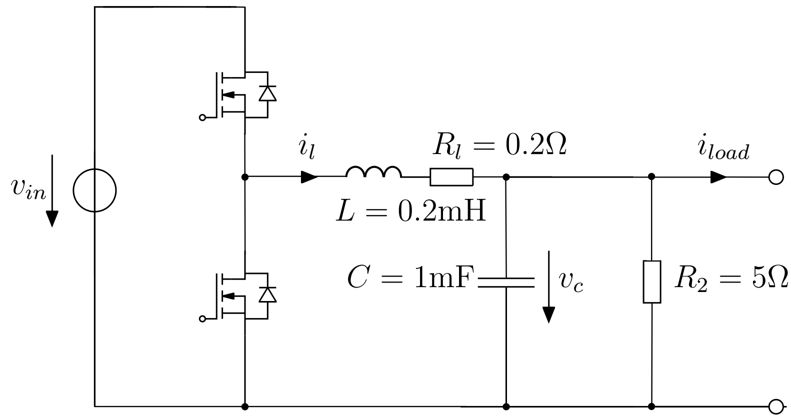


Abbildung 1: Toplogie des einphasigen Buck Converters

Das Verhalten des Buck-Converters lässt sich über die Systemgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_l &= \frac{1}{L}\left(\alpha v_{in} - R_l i_l - v_c\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_c &= \frac{1}{C}\left(i_l - i_{load} - \frac{v_c}{R_2}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

mit den Zuständen $\mathbf{x} = [i_l, v_c]^{\mathrm{T}}$, der Stellgröße $u = \alpha \in [0, 1]$ (Tastverhältnis der Halbbrücke) und den exogenen Größen $\mathbf{w} = [v_{in}, i_{load}]^{\mathrm{T}}$ beschreiben.

a) Berechnen Sie die stationären Systemzustände $\mathbf{x}_R = [i_{l,R}, v_{c,R}]^{\mathrm{T}}$ und die Stellgröße $u_R = \alpha_R$, sodass im Arbeitspunkt

$$
\begin{aligned}
i_{load,R} &= 6\text{A} \\
v_{c,R} &= 20\text{V} \\
v_{in,R} &= 44\text{V}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

gilt. 1 P.|

b) Linearisieren Sie das System (1) um diese Ruhelage und schreiben Sie das linearisierte System allgemein in einer Zustandsraumdarstellung gemäß

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u + \mathbf{B}_w\Delta\mathbf{w} \\
\Delta\mathbf{y} &= \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{d}\Delta u + \mathbf{D}_w\Delta\mathbf{w}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

mit $\mathbf{y} = [i_l, v_c]^{\mathrm{T}}$ an. 2 P.|

c) Berechnen Sie allgemein (keine Zahlenwerte einsetzen) die Übertragungsfunktion $G_{i_l,\alpha}(s) = \frac{i_l(s)}{\alpha(s)}$. 1.5 P.|

d) Verwenden Sie im Weiteren 2 P.|

$$G_{i_l,\alpha}(s) = 10^{-\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{s}{200}}{\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)^2}. \tag{4}$$

Zeichnen Sie den Amplituden- und Phasengang für $G_{i_l,\alpha}(s)$ in Form einer Knickzugkennlinie in das beigefügte Bodediagramm.

e) Entwerfen Sie für $G_{i_l,\alpha}(s)$ von (4) einen zeitkontinuierlichen PI-Regler $G_{i_l-reg}(s) = \frac{V_1(1+sT_1)}{s}$ zur Stromregelung von i_l mithilfe des FKL-Verfahrens, welcher folgende Anforderungen erfüllt 2 P.|

- Anstiegszeit $t_r = 7.5\mu s$
- Überschwingen ü = 25%

Hinweis: Verwenden Sie dabei $\arctan(20) \approx 90°$.

f) Der innere Regelkreis kann als ausreichend schnell angenommen werden, sodass die Stromregelung als eine Durchschaltung für die Spannungsregelung von v_c betrachtet werden kann. Führen Sie nun i_l^d (Sollgröße für die Stromregelung) als neue Stellgröße für den äußeren Regelkreis ein und schreiben Sie das zu regelnde System in Zustandsraumdarstellung sowie die resultierende Übertragungsfunktion $G_{v_c,i_l^d}(s) = \frac{v_c(s)}{i_l^d(s)}$ an. 0.5 P.|

g) Geben Sie die Struktur der Regelung in Form eines Blockschaltbildes an. Als Struktur für die Strecke soll die Darstellung von Abbildung 2 verwendet werden. Benennen Sie alle Größen im Blockschaltbild. 1 P.|

Hinweis: Berücksichtigen Sie dabei die Ruhelagen!

Annahme: Das System $G_{v_c,i_l^d}(s)$ wird mit $G_{v_c-reg}(s)$ stabilisiert.

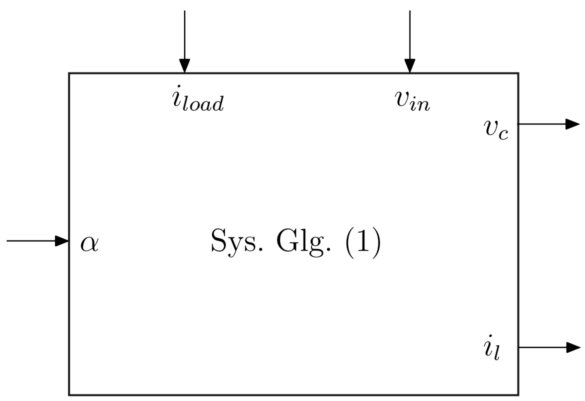


Abbildung 2: Struktur der Strecke für das Blockschaltbild

Lösung:

a)

$$v_{c,R} = 20\text{V}$$
$$i_{l,R} = 10\text{A}$$
$$\alpha_R = 0.5$$

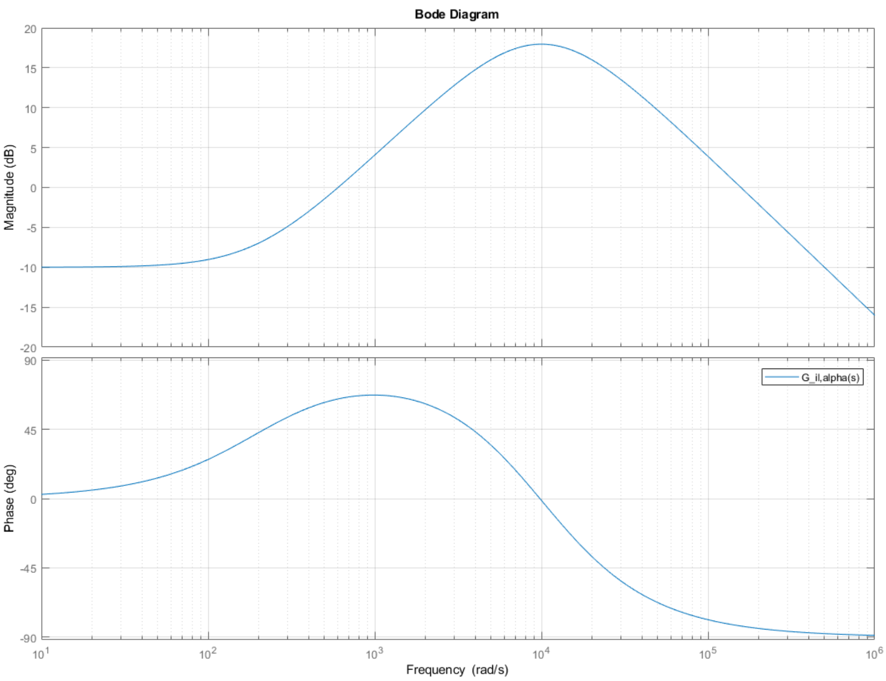
b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_l}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{v_{in,R}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$G_{i_l,\alpha}(s) = \frac{v_{in,R}}{L} \frac{\left(s + \frac{1}{CR_2}\right)}{\left(s + \frac{R_l}{L}\right)\left(s + \frac{1}{CR_2}\right) + \frac{1}{LC}}$$

d) Bode Diagramm



e)

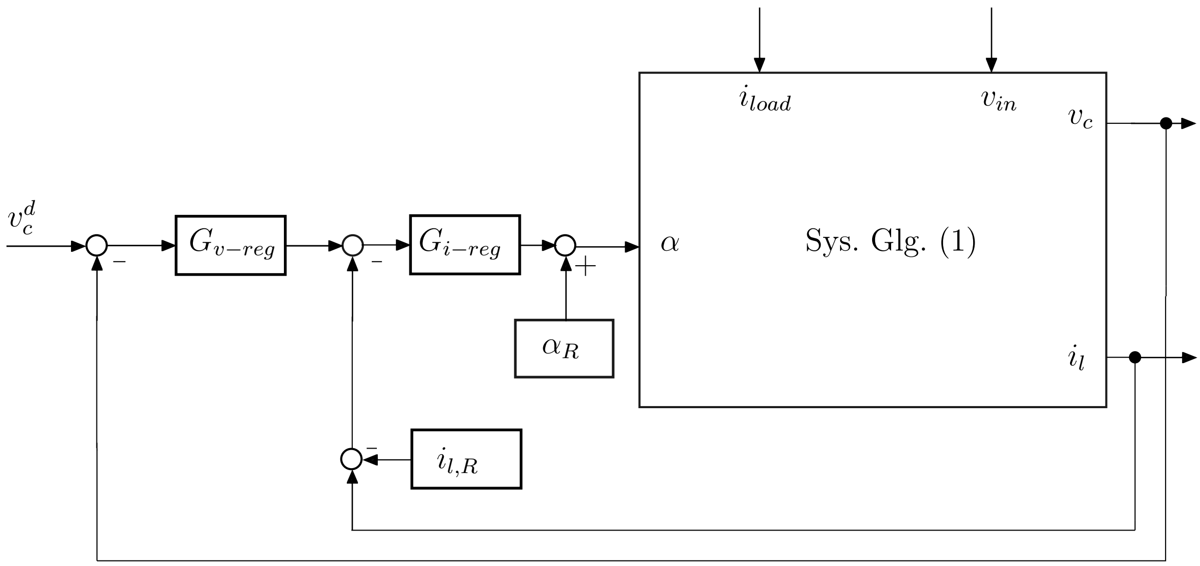
$$T_1 = \frac{1}{\omega_c} = 5\ 10^{-6}\mathrm{s}$$
$$V_1 = 10^{\frac{1}{2}} \frac{2(1+20^2)10^5}{\sqrt{2}\sqrt{1+10^6}}$$

f)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta v_c = -\frac{1}{R_2 C}\Delta v_c + \frac{1}{C}\Delta i_l^d - \frac{1}{C}\Delta i_{load}$$

$$G_{v_c, i_l^d}(s) = \frac{R_2}{1 + R_2 C s}$$

g) Blockschaltbild



2. Bearbeiten Sie die folgenden unabhängig voneinander lösbaren Punkte a) und b). 10 P.|

   a) Gegeben ist ein zeitdiskretes System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} u_k, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$

   mit

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \beta u_k.$$

      i. Ermitteln Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems. 1.5 P.|
      ii. Ist dieses System vollständig beobachtbar? 1 P.|
      iii. Ist es möglich, mit einem trivialen Beobachter (Simulator) den Zustand $\mathbf{x}_k$ zu schätzen? Klingt der Beobachtungsfehler $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ ab? **Hinweis**: Die explizite Berechnung der Eigenwerte ist nicht notwendig 1 P.|
      iv. Entwerfen Sie einen vollständigen Luenberger Beobachter für den Zustand $\mathbf{x}_k$. Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}_e$ des Fehlersystems $\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_e \mathbf{e}_k$ mit $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ sollen die Werte $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ und $\lambda_3 = 0$ annehmen. 2.5 P.|
      v. Können die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}_g = \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T}$ des geschlossenen Kreises mit einer Zustandsrückführung der Form $u_k = \mathbf{k}^\mathrm{T}\mathbf{x}_k + g r_k$ beliebig vorgegeben werden? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

   b) Gegeben ist ein System mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = 2\frac{(s-10)}{(s+10)\left(\frac{s}{10\sqrt{3}}+1\right)} e^{-6s} \tag{6}$$

   und dem Eingang u. Das System wird nun mit

$$u(t) = \left(2 + \frac{1}{10}\cos\left(10t + \frac{4\pi}{3}\right) + e^{-\frac{t}{10}} \sin\left(8t - \frac{\pi}{3}\right)\right)\sigma(t) \tag{7}$$

   angeregt.

      i. Untersuchen Sie das System $F(s)$ hinsichtlich Minimalphasigkeit? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich! 0.5 P.|
      ii. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Ausgangs $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand, wenn das System (6) mit $u(t)$ gemäß (7) beaufschlagt wird. 2.5 P.|

Lösung:

a) i.

$$G(z) = \frac{\beta z^3 + (1-\beta)\, z^2 - 2\beta z - (1+3\beta)}{z^3 - z^2 - 2z - 3}$$

ii. Das System ist vollständig beobachtbar. Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

hat vollen Rang.

iii. Aus der notwendigen Bedingung für ein Einheitskreispolynom nach

$$\left\| \frac{a_0}{a_n} \right\| = \left\| \frac{3}{1} \right\| > 1$$

folgt, dass nicht alle Eigenwerte innerhalb des Einheitskreises liegen und es sich daher um eine instabile Strecke handelt. Daher ist es nicht möglich den Zustand $\mathbf{x}_k$ über einen trivialen Beobachter zu schätzen.

iv.

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{17}{8} \\ -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

v. Die Erreichbarketismatrix lautet

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und besitzt den Rang 3. Daher sind die Eigenwerte mit der angeführten Zustandsrückführung frei platzierbar.

b) i. Das System ist nicht minimalphasig, da sich eine Nullstelle in der rechten offenen s-Halbebene bei $s_{n1} = 10$ befindet. Die Pole sind bei $s_{p1} = -10$ und $s_{p2} = -10\sqrt{3}$ und liegen daher in der linken offenen s-Halbebene. Dementsprechend ist das System $F(s)$ stabil.

ii.

$$y(t) = -4 - \frac{\sqrt{3}}{10} \cos\left(10t + \frac{4\pi}{3} \underbrace{-\frac{2\pi}{3} - 60}_{\arg(F(j10))}\right)$$

3. Folgende Aufgabe besteht aus vier Unterpunkten a), b), c) und d), die unabhängig voneinander bearbeitet werden können. 10 P.|

   a) Gegeben ist eine nichtlineare Differentialgleichung höherer Ordnung der Form 2 P.|

$$\int_0^t (u(\tau) + y(\tau) + \dot{y}(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \ddot{y}(t) - y(t)\dot{y}(t) = 0. \tag{8}$$

   Schreiben Sie (8) in der Zustandsformdarstellung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$, $y(t) = h(\mathbf{x}, u)$ mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ und dem Eingang $u(t)$ an.

   b) Für die folgenden skalaren Differentialgleichungen sollen die zugehörigen exakten Abtastsysteme mit der Abtastzeit T_a hergeleitet werden.

      i. $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t - 2T_a)$, $x(t_0) = x_0$ 1 P.|

      ii. $\dot{x}(t) = -x(t)^2$, $x(t_0) > 0$ **Hinweis:** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-1}\right) = -\frac{1}{x^2}$. 2 P.|

   c) Zeigen Sie anhand der Definition die Zeitinvarianz des Systems 2 P.|

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a + bu(t) \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

   d) Gegeben ist ein LTI System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ in der 1-ten Standardform. Zeigen Sie für einen allgemeinen Fall mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dass die Einträge in der letzten Zeile der Matrix $\mathbf{A}$ den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p(s)$ von $\mathbf{A}$ entsprechen. **Hinweis:** Nutzen Sie die Tatsache, dass aus $p(\lambda) = 0$ die Existenz eines nichttrivialen Vektors $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ mit $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ folgt. 3 P.|

Lösung:

a) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t)x_2(t) + x_3(t) \\ x_1(t) + x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}(t)$

b) i. $x_{k+1} = e^{aT_a} x_k + \frac{1}{a}\left(e^{aT_a} - 1\right) b u_{k-2}$

   ii. $x_{k+1} = \frac{x_k}{1+T_a x_k}$

c) Für den Anfangswert $x(t_0) = x_0$ und die Eingangsgröße $u(\tau), t_0 \leq \tau \leq t$ gilt $y(t) = a(t - t_0) + b \int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$. Die Ausgangsgröße $\bar{y}(t)$ für den Anfangswert $x(t_0 + T) = x_0$ und die Eingangsgröße $u(\tau - T), t_0 + T \leq \tau \leq t + T$ lautet

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= a(t - t_0 - T) + b \int_{t_0+T}^{t} u(\tau - T)\mathrm{d}\tau \\ &= a(t - T - t_0) + b \int_{t_0}^{t-T} u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= y(t - T). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Zeitinvarianz des Systems.

d) Aus $p(\lambda) = 0$ folgt für eine Matrix in der 1-ten Standardform, dass

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}. \tag{10}$$

Aus den ersten $n - 1$ Zeilen von (10), dass $v_i = \lambda^{i-1} v_1$ für $i = 2, \ldots, n$. Mit der letzten Zeile von (10) ergibt sich durch das Substituieren von v_i, dass $v_1\left(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\right) = 0$. Wegen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ und damit $v_1 \neq 0$, muss der Klammerausdruck Null sein. Damit folgt, dass es sich beim

$$p(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

um das charakteristische Polynom handelt, dessen Koeffizienten der Matrix $\mathbf{A}$ entnommen werden können.

4. Betrachtet wird eine in Abbildung 3 dargestellte zeitdiskrete Strecke mit dem Eingang u_k, dem Ausgang y_k und den reellen Parametern a_i, $i = 1, 2$. 10 P.|

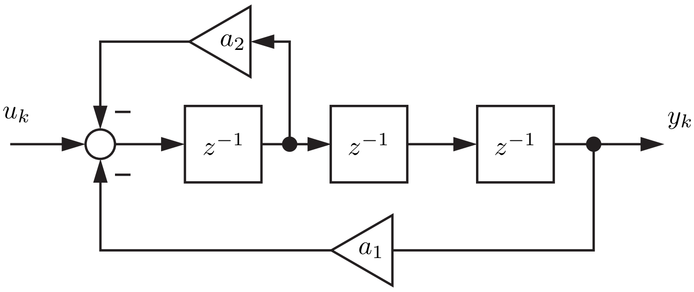


Abbildung 3: Blockschaltbild einer zeitdiskreten Strecke.

a) Bestimmen Sie die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung der Strecke in der Form 3 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \tag{11a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k. \tag{11b}$$

b) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung für u_k der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$, so dass jede Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0$ in höchstens drei Schritten zu $\mathbf{0}$ übergeht. 2.5 P.|

c) Das System (11) soll nun um einen Integrator erweitert werden. Geben Sie die Differenzengleichung des Integratorzustands $x_{I,k}$ an, welche die Differenz zwischen der Führungsgröße r_k und dem Ausgang y_k aufsummiert. Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}_e$ und den Eingangsvektor $\mathbf{\Gamma}_e$ des erweiterten Systems. 2.5 P.|

d) Skizzieren Sie das Blockschaltbild des um den Integrator erweiterten geschlossenen Regelkreises. Markieren Sie in der Skizze folgende Signale: Führungsgröße r_k, Regelfehler $e_k = r_k - y_k$, Eingangsgröße u_k, Systemzustand $\mathbf{x}_k$, Integratorzustand $x_{I,k}$ und Ausgangsgröße y_k. Berücksichtigen Sie in der Skizze sowohl die Gewichtung des rückgeführten Zustandes $\mathbf{x}_k$ als auch die des Integratorzustands $x_{I,k}$. Nutzen Sie das Ersatzblockschaltbild aus Abbildung 4 für die in 2 P.|

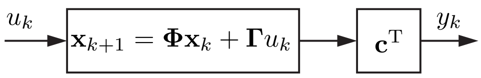


Abbildung 4: Ersatzblockschaltbild.

Abbildung 3 dargestellte Strecke.

Lösung:

a) $\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & 0 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k$

b) Es handelt sich um einen Dead-Beat Regler, daher $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$ mit $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 \end{bmatrix}$.

c) Gleichung des Integrators lautet $x_{I,k+1} = x_{I,k} + r_k - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$. Das erweiterte System genügt der Differenzengleichung $\mathbf{x}_{e,k+1} = \mathbf{\Phi}_e \mathbf{x}_{e,k} + \mathbf{\Gamma}_e u_k$ mit $\mathbf{\Phi}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Gamma}_e^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{x}_{e,k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} & x_{I,k} \end{bmatrix}$.

d) Das Blockschaltbild des um den Integrator erweiterten geschlossenen Regelkreises ist in Abbildung 5 dargestellt.

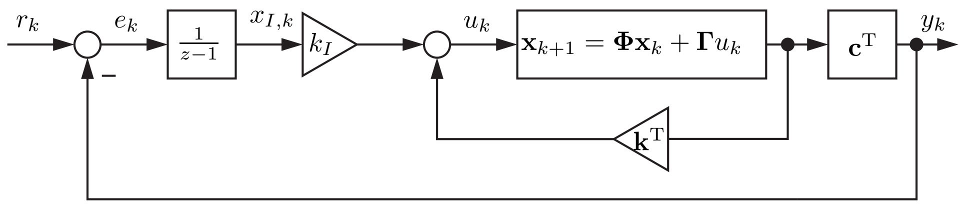


Abbildung 5: Zustandsregler mit Integrator.