

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 30.11.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	14	7	10	9	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und
- ... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 11.12.2018

☐ 12.12.2018

Viel Erfolg!

1. Die Lage und Position eines propulsiv angetriebenen Flugobjektes kann mit den Systemgleichungen **14 P.**

$$m\ddot{x} = F \sin(\phi - \gamma) - k_x \dot{x} \quad (1a)$$

$$m\ddot{y} = F \cos(\phi - \gamma) - mg - k_y \dot{y} \quad (1b)$$

$$J\ddot{\gamma} = Fa \sin(\phi) - k_r \dot{\gamma} \quad (1c)$$

beschrieben werden. Dabei sind x, y die Koordinaten in der (xy) Ebene, γ ist die Drehung des Objektes im mathematisch positiven Sinn, F ist der Betrag des Schubvektors mit dem Winkel ϕ zur körperfesten x -Achse, g ist die Erdbeschleunigung und m, J, a, k_x, k_y, k_r sind die konstanten Parameter des Systems. Die Eingänge des Systems sind F, ϕ und die Koordinaten x, y sind die Ausgänge des Systems. Weiters gilt $-\pi < \gamma \leq \pi$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ und $F > 0$.

- a) Wie viele Zustände hat das System? Berechnen Sie die Ruhelagen des Systems (1). **1 P.**
- b) Linearisieren Sie das System (1) um diese Ruhelage und geben Sie das Resultat in Zustandsraumdarstellung an. **3 P.**
- c) Durch die Linearisierung wird das Mehrgrößensystem in zwei Eingrößensysteme zerlegt. Identifizieren Sie die beiden unabhängigen Teilsysteme und geben Sie diese in Zustandsraumdarstellung an. **1 P.**

Die weiteren Aufgaben können unabhängig von den vorherigen Lösungen bearbeitet werden.

Betrachten Sie nun das Teilsystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} u \quad (2a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d \quad (2b)$$

mit $\alpha > 0, \beta > 0$ und der am Ausgang wirkenden Störung $d(t)$.

- d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \hat{y}/\hat{u}|_{d=0}$ der Strecke (2). Ist diese Strecke stabil? **1 P.**
- e) Nun soll ein Proportionalregler $\hat{u} = k(\hat{r} - \hat{y})$ verwendet werden. Für welche Werte von k ist der geschlossene Regelkreis BIBO stabil? **1 P.**
- f) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des resultierenden Regelkreises und markieren Sie die Größen r, u, d, y . **1 P.**
- g) Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}$ mit dem P-Regler aus dem vorherigen Punkt. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung e_∞ auf einen Führungsgrößenprung $r(t) = \sigma(t)$. **1,5 P.**
- h) Berechnen Sie die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}$ sowie den stationären Endwert y_∞ bei einem Störgrößenprung $d(t) = \sigma(t)$? Setzen Sie dafür $r = 0$. **1,5 P.**
- i) Es sei angenommen, dass die Störgröße d messtechnisch erfasst werden kann. Nun soll eine Störgrößenaufschaltung $\hat{u}_d = -R_d(s)\hat{d}$ zusätzlich zum Proportionalregler mit $\hat{u} = k(\hat{r} - \hat{y}) + \hat{u}_d$ verwendet werden. Berechnen Sie die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}$ mit der Aufschaltung von u_d . **2 P.**
- j) Wie müsste $R_d(s)$ entworfen werden, um Störungen ideal kompensieren zu können? Ist der resultierende Regler realisierbar? **1 P.**

Lösung:

a) 6 Zustände: $x, \dot{x}, y, \dot{y}, \gamma, \dot{\gamma}$

Die Ruhelagen berechnen sich zu $\dot{x}_R = \dot{y}_R = \dot{\gamma}_R = 0, \phi_R = 0, F_R = mg, \gamma_r = 0$, sowie beliebige x_R, y_R .

b) Die Linearisierung um die zuvor berechnete Ruhelage ergibt

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \Delta \ddot{y} \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \ddot{x} \\ \Delta \dot{\gamma} \\ \Delta \ddot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_y}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_x}{m} & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_r}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta x \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \gamma \\ \Delta \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta F + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \\ \frac{mag}{J} \end{bmatrix} \Delta \phi$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta x \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \gamma \\ \Delta \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

c) Die beiden Teilsysteme lauten

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \Delta \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_y}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \Delta F$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \ddot{x} \\ \Delta \dot{\gamma} \\ \Delta \ddot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_x}{m} & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_r}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \gamma \\ \Delta \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ \frac{mag}{J} \end{bmatrix} \Delta \phi$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \gamma \\ \Delta \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

d) $G(s)|_{d=0} = \frac{\beta}{s(s+\alpha)}$, nicht BIBO-stabil

e) Der Regelkreis ist für $k > 0$ stabil.

f) Das Blockschaltbild des Regelkreises ist in Abbildung 1 zu sehen.

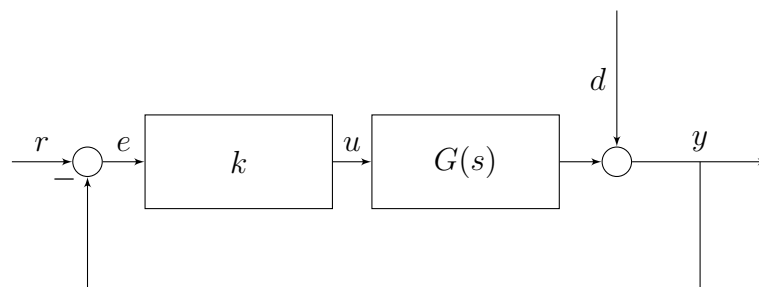


Abbildung 1: Regelkreis mit Störung am Ausgang.

$$g) \quad T_{r,y}(s) = \frac{k\beta}{k\beta+s\alpha+s^2}, \quad e_\infty = 0$$

$$h) \quad T_{d,y}(s) = \frac{s\alpha+s^2}{k\beta+s\alpha+s^2}, \quad y_\infty = 0$$

$$i) \quad T_{d,y}(s) = \frac{1-R_d(s)G(s)}{1+kG(s)}$$

$$j) \quad R_d(s) = \frac{1}{G(s)}, \quad \textit{nicht realisierbar}$$

2. Gegeben ist die Übertragungsfunktion

7 P. |

$$G(s) = \frac{100 + s}{10 + 9s - s^2}. \quad (3)$$

- a) Analysieren Sie $G(s)$ hinsichtlich Stabilität sowie Minimalphasigkeit. 1 P. |
- b) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm von $G(s)$ in Abbildung ?? ein. 3 P. |
- c) Berechnen Sie die q -Übertragungsfunktionen zu dem zeitkontinuierlichen System $G(s)$ für eine allgemeine Abtastzeit T_a . 3 P. |

Hinweis: Wenden Sie zuvor die Partialbruchzerlegung auf $G(s)$ an!

Lösung:

- a) Nicht BIBO-stabil, nicht phasenminimal
b) Das Bodediagramm von $G(s)$ ist in Abbildung 2 zu sehen.

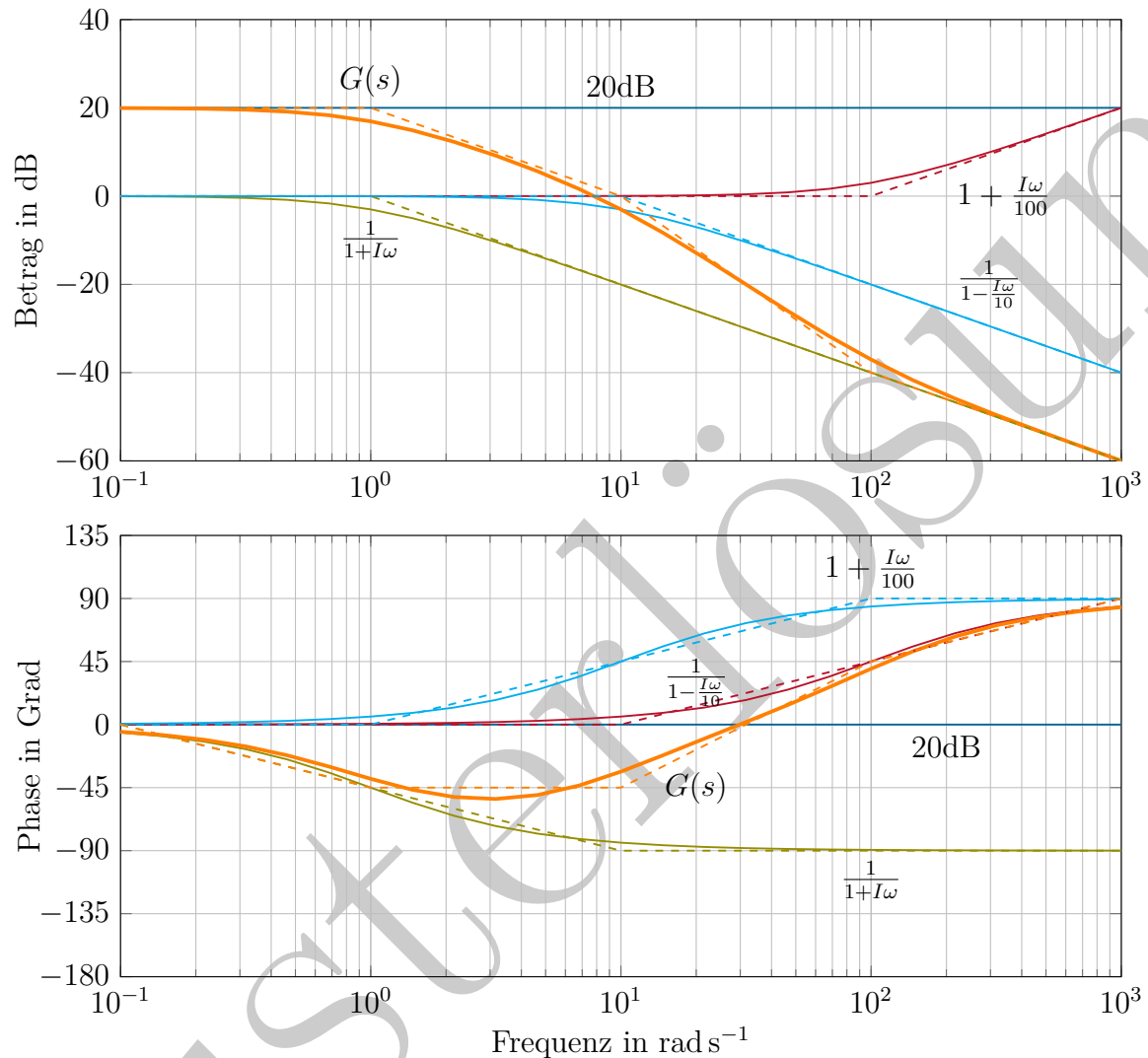


Abbildung 2: Bodediagramm.

c) $G^\#(q) = \frac{9(1-\frac{T_a}{2}q)}{1+\frac{q}{C}} + \frac{1-\frac{T_a}{2}q}{1+\frac{q}{D}}$ mit $C = \frac{2}{T_a} \tanh\left(\frac{T_a}{2}\right)$, $D = \frac{2}{T_a} \tanh(-5T_a)$

3. Lösen Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben 3a) und 3b) zu Beobachter- und Reglerentwurf von zeitdiskreten Systemen. 10 P.

- a) Gegeben ist das zeitdiskrete System mit der Zustandsdarstellung 6 P.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad (4a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \quad (4b)$$

- i. Ist das System vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort! 2 P.
ii. Kann für das beobachtbare (Teil-)System ein trivialer Beobachter entworfen werden? Bezeichnen Sie dazu das beobachtbare (Teil-)System und begründen Sie wiederum Ihre Antwort! 2 P.

Hinweis: Beachten Sie die besondere Struktur des Systems!

- iii. Entwerfen Sie für das beobachtbare (Teil-)System einen vollständigen Luenberger Beobachter so, dass alle Eigenwerte des Fehlersystems bei $\frac{1}{2}$ liegen. 2 P.

- b) Für das System (4) wurde ein Zustandsregler der Form 4 P.

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + g r_k \quad (5)$$

mit $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$ entworfen.

- i. Wo liegen die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises? 2 P.
ii. Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor g in (5) so, dass für die Sprungfolge $(r_k) = (1^k)$ gilt $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 1$. 2 P.

Lösung:

- a) i. Nein, Zustand $x_{3,k}$ wirkt nicht auf die restlichen Zustände und somit nicht auf den Ausgang y_k .
ii. Beobachtbares Teilsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u_k$$

Dessen Eigenwerte $z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4} < 1$ liegen im Inneren des Einheitskreises. Daher ist das System stabil, und ein trivialer Beobachter möglich.

iii. $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

- b) i. Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises $z_{1,2} = 0, z_3 = \frac{1}{2}$.
ii. $g = 2$

4. Lösen Sie die voneinander unabhängigen Aufgaben!

9 P. |

- a) Gegeben ist der in Abbildung 3 dargestellte Regelkreis mit der Übertragungsfunktion

4 P. |

$$G(s) = \frac{V_G(s-2)}{(s+1)(s^2+2s+2)}. \quad (6)$$

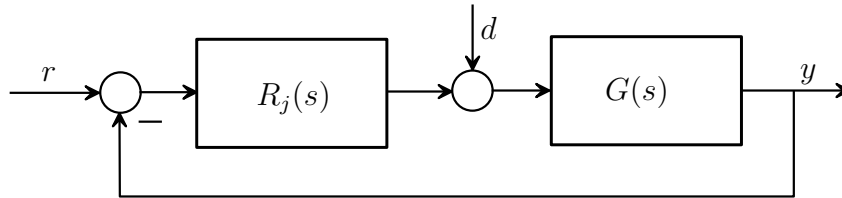


Abbildung 3: Regelkreis.

und den Reglern

$$R_1(s) = \frac{V_R(s+1)(s^2+2s+2)}{(s-2)(s+2)^2} \quad R_2(s) = \frac{V_R(s+1)(s^2+2s+2)}{(s+2)^2}$$

$$R_3(s) = \frac{V_R(s+1)(s^2+2s+2)}{(s+2)^3}$$

Welcher der (realisierbaren) Regler führt zu einem intern stabilen Regelkreis? Begründen Sie Ihre Antwort! Bestimmen Sie gegebenenfalls einen Wertebereich für das Produkt $V_G V_R$ mithilfe des Routh-Hurwitz Verfahrens welcher die Strecke stabilisiert.

- b) Gegeben ist die Transitionsmatrix

5 P. |

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (7)$$

eines linearen zeitinvarianten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

- i. Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems. 1 P. |
- ii. Von der Transitionsmatrix des zeitkontinuierlichen Systems (7) ist die Dynamikmatrix des zugehörigen zeitdiskreten Systems 1 P. |

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (8)$$

gegeben. Bestimmen Sie die zur Diskretisierung verwendete Abtastzeit T_a .

- iii. Bestimmen Sie nun mit dem Eingangsvektor $\mathbf{b}^T = [0 \ 1]$ und dem Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T = [1 \ 1]$ des zeitkontinuierlichen Systems die z -Übertragungsfunktion des zeitdiskreten Systems. 3 P. |

Lösung:

a) R_1 führt zu unerlaubter Nullstellen-Kürzung, daher nicht intern stabil, R_2 ist nicht realisierbar, R_3 führt zu intern stabilen Regelkreis mit $-8 < V_R V_G < 4$

b) i. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

ii. $T_a = \ln(2)$

iii. $G(z) = \frac{1}{2z-1}$