Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 01.02.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	9	9	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 11.02.2019 ☐ 12.02.2019

Viel Erfolg!

1. Es sei eine Differentialgleichung der Form **11 P.|**

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = u \tag{1}$$

mit den Konstanten m, d und k sowie dem Eingang u gegeben.

a) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung im Laplace-Bereich unter Berücksichtigung allgemeiner Anfangsbedingungen $y(0)$ und $\dot{y}(0)$. **1 P.|**

b) Geben Sie an für welche Wahl der Parameter m, d und k das System (1) BIBO-stabil ist. Begründen Sie Ihre Aussage. **1 P.|**

c) Kreuzen Sie bezüglich Stabilität die richtige(n) Implikation(en) an. **1 P.|**
☐ BIBO-Stabilität ⇒ global asymptotische Stabilität
☐ global asymptotische Stabilität ⇒ BIBO-Stabilität

d) Nehmen Sie als Eingangsgröße für (1) einen Sprung an und führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch. Geben Sie die Lösung anschließend für die Parameter $m = 1$, $d = 0$ und $k = 1$ sowie $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ im Zeitbereich an. **2 P.|**

e) Skizzieren Sie die resultierende Sprungantwort. **1 P.|**

Die weiteren Aufgaben können unabhängig von den vorherigen Lösungen bearbeitet werden.

Zur Identifikation einer Übertragungsfunktion der Form

$$G(s) = \frac{V_G}{(s+a)(s+b)} \tag{2}$$

ist das Bode-Diagramm aus Abbildung 1 gegeben.

f) Ermitteln Sie die unbekannten Parameter V_G, a und b mit Hilfe des Bode-Diagramms aus Abbildung 1. **1.5 P.|**

g) Entwickeln Sie für die gegebene Strecke einen PI-Regler der Form **2 P.|**

$$R(s) = \frac{V_I(1+sT_I)}{s} \; . \tag{3}$$

Für die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises soll sich dabei eine Anstiegszeit von 1.5 s und ein Überschwingen von 40% einstellen.

h) Nehmen Sie nun an, dass die Strecke $G(s)$ eine zusätzliche Totzeit e^{-sT_t} aufweist. Wie groß darf die Totzeit T_t maximal sein, damit der geschlossene Regelkreis BIBO-Stabil ist. **1.5 P.|**

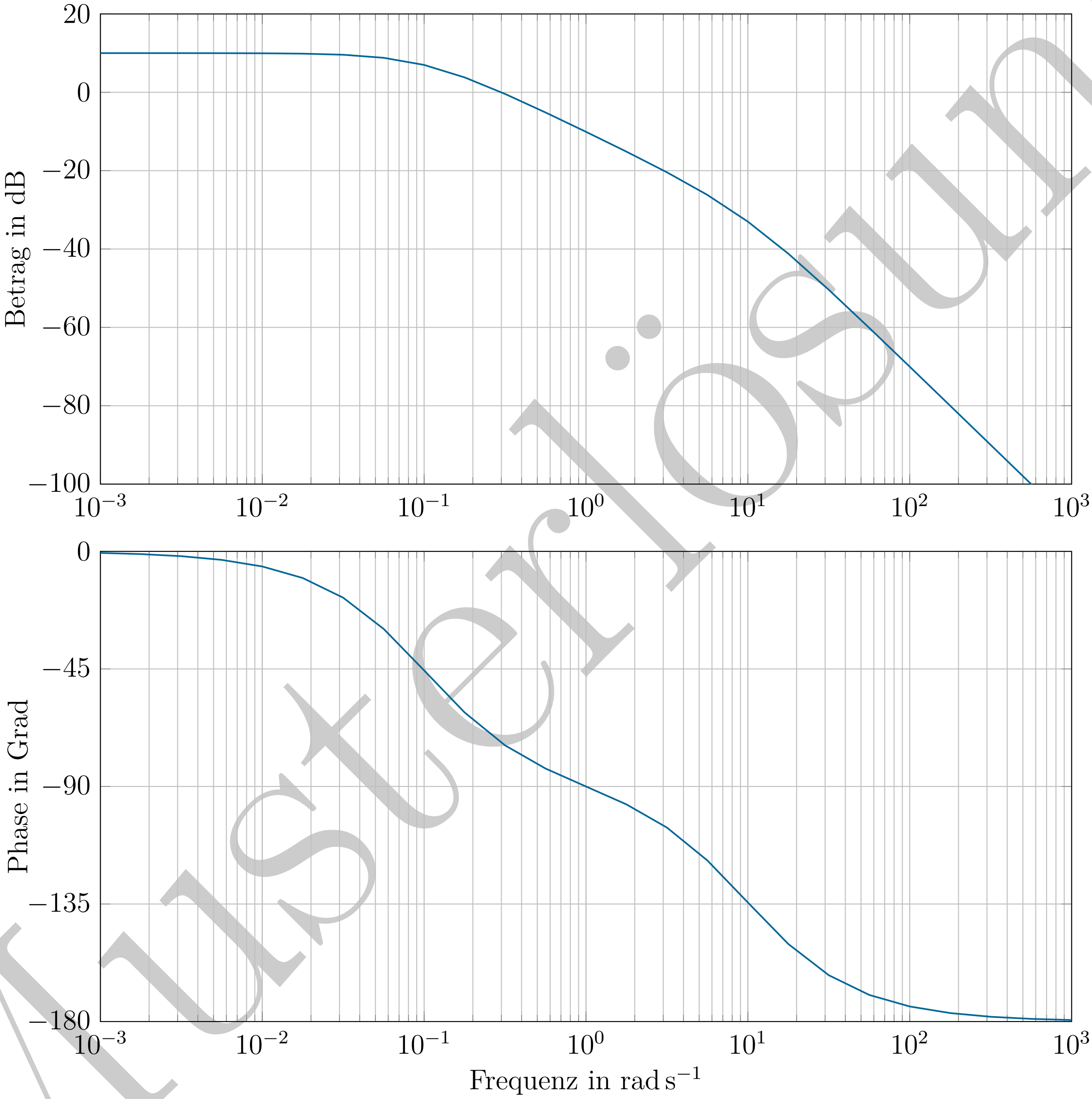

Abbildung 1: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion $G(s)$.

Lösung:

a)

$$y = \frac{u + m\dot{y}(0) + y(0)(ms + d)}{ms^2 + ds + k} \tag{4}$$

b) *Gemäß Satz 4.2 (Automatisierungstechnik): Die Koeffizienten m, d, k müssen von Null verschieden sein und gleiches Vorzeichen haben.*

c) *global asymptotische Stabilität $\Rightarrow$ BIBO-Stabilität*

d) $y(t) = \sigma(t) - \cos(t)$

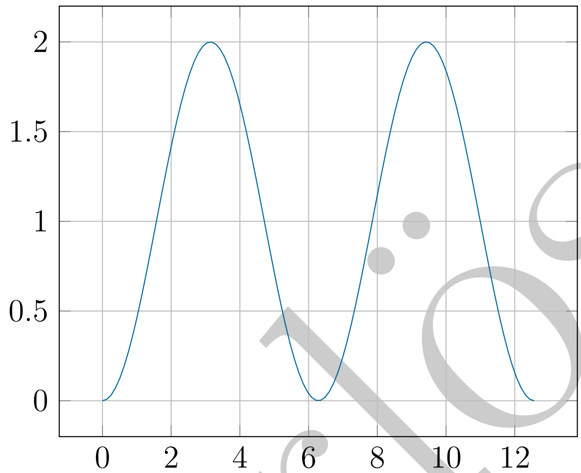

Abbildung 2: Sprungantwort von Aufgabe *e*.

e)

f) $V_G = \sqrt{10} = 3.1623$, $a = 10$, $b = 0.1$

g) $T_I = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $V_I = \frac{30.3}{2\sqrt{30}}$

h) $T_t = \pi/6$

2. Gegeben ist das Pol-Nullstellen Diagramm einer Übertragungsfunktion $G(s)$. **9 P.**|

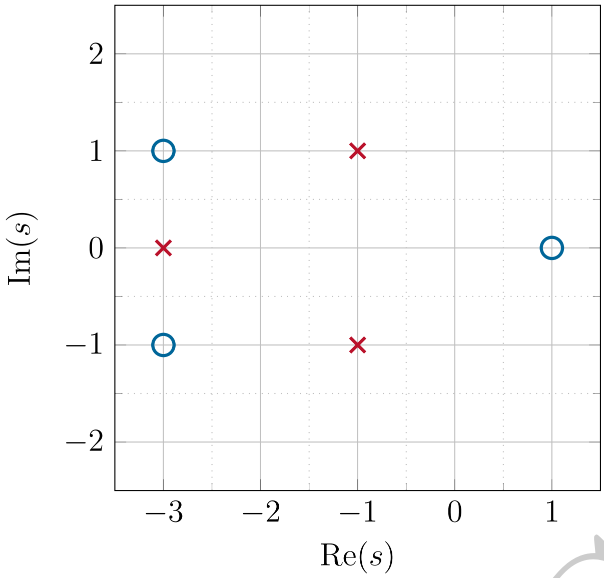

Abbildung 3: Pol-Nullstellen Diagramm zu Aufgabe 2 (Nullstellen ∘, Polstellen ×).

a) Analysieren Sie $G(s)$ hinsichtlich BIBO-Stabilität, Minimalphasigkeit, Sprungfähigkeit sowie Realisierbarkeit. **2 P.**|

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ und geben Sie diese in der ersten Standardform an. **2 P.**|
Hinweis: Im Pol-Nullstellen Diagramm kann die Verstärkung V nicht eindeutig abgelesen werden. Schreiben Sie die Übertragungsfunktion daher mit einem allgemeinen Verstärkungsfaktor V an.

Die weiteren Aufgaben können unabhängig von den vorherigen Lösungen bearbeitet werden.

Gegeben ist die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$L(s) = K\frac{s^2 + 4s + 4}{(s^2 + s + 1)^2} \ . \tag{5}$$

In Abbildung 4 ist die Ortskurve von (5) für einen Verstärkungsfaktor von $K = 1$ dargestellt.

c) Zeichnen Sie den Durchlaufsinn sowie die Frequenzen $\omega = 0$, $\omega = \pm\infty$ in die Ortskurve aus Abbildung 4 ein. **2 P.**|

d) Ist der zugehörige geschlossene Regelkreis für $K = 1$ BIBO-Stabil? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Nyquist-Kriteriums. **1 P.**|

e) Für welche $K > 0$ ist der geschlossene Regelkreis BIBO-Stabil? **2 P.**|

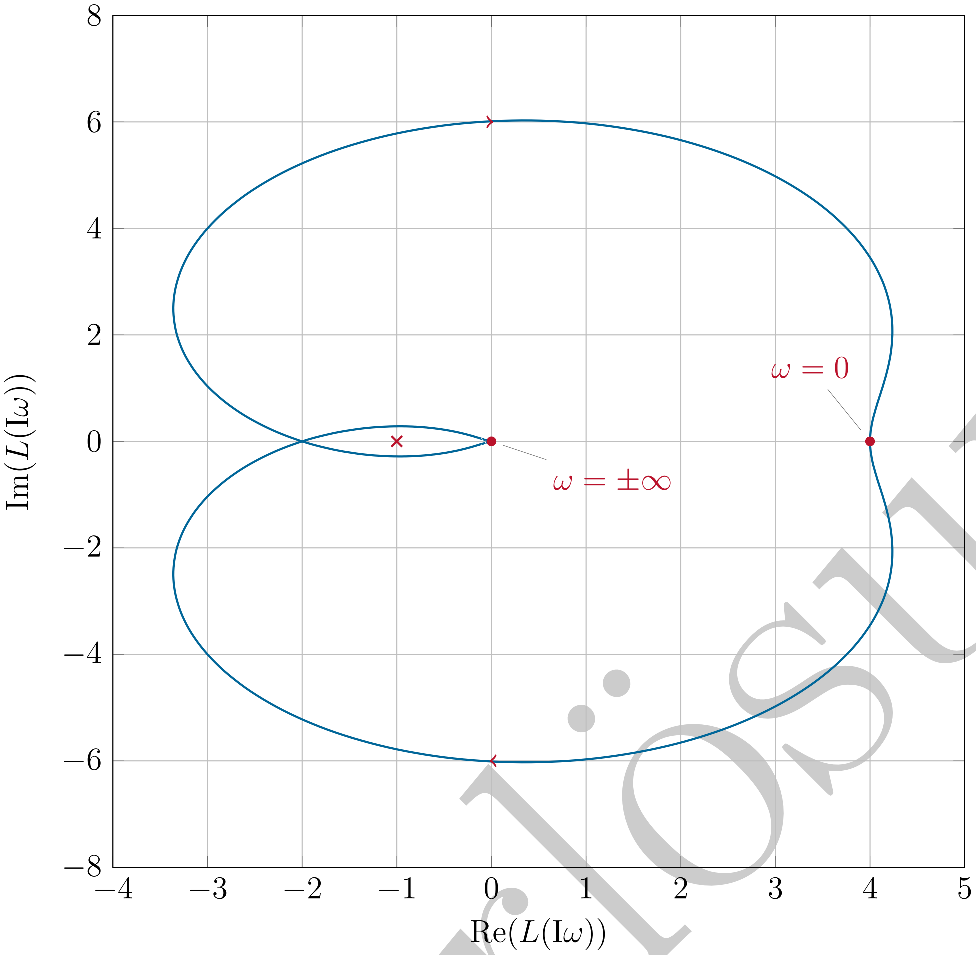

Abbildung 4: Ortskurve von $L(s)$ für $K = 1$.

Lösung:

a) BIBO-stabil, nicht phasenminimal, sprungfähig, realisierbar

b)

$$G(s) = V\frac{(s-1)(s^2+6s+10)}{(s+3)(s^2+2s+2)} = V\frac{-10+4s+5s^2+s^3}{6+8s+5s^2+s^3} \tag{6}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -8 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7a}$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -16V & -4V & 0 \end{bmatrix} d = V \tag{7b}$$

c) siehe Abbildung 4 in rot

d) nein, da $-4\pi \neq (4-4+0)\pi$

e) $0 < K < 1/2$

3. Gegeben ist das System **9 P.|**

$$
\dot{\mathbf{x}} = \dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} au - b\sqrt{x_1} \\ x_3 \\ -cx_3 - dx_2 + ax_1^2 \end{bmatrix} \tag{8a}
$$

$$
y = h(\mathbf{x}) = x_2 + \sin(x_3) + e \tag{8b}
$$

mit den konstanten positiven Parametern a, b, c, d und e.

a) Ist das System linear? Begründen Sie ihre Antwort! **1 P.|**

b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems. Wieviele Ruhelagen besitzt das System bei einem vorgegebenen Eingang $u = u_\mathrm{R} > 0$? **2 P.|**

c) Linearisieren Sie das System um eine Ruhelage welche durch $u = u_\mathrm{R}$ definiert ist. Geben Sie das linearisierte System in der Zustandsraumdarstellung **3 P.|**

$$
\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \tag{9a}
$$

$$
\Delta y = \mathbf{c}^\mathrm{T}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \tag{9b}
$$

an.

d) Nehmen sie nun an, dass für das linearisierte System ein Zustandsbeobachter $\Delta\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\Delta u + \mathbf{k}_\mathrm{B}(\Delta y - \Delta\hat{y})$, $\Delta\hat{y} = \mathbf{c}^\mathrm{T}\Delta\hat{\mathbf{x}} + d\Delta u$ und ein Zustandsregler $\Delta u = \mathbf{k}_\mathrm{R}^\mathrm{T}\Delta\hat{\mathbf{x}}$ zum Stabilisieren des Arbeitspunktes $u = u_\mathrm{R}$ entworfen wurde. Zeichnen Sie den Zustandsbeobacher und den Zustandsregler in Abbildung 5 ein. Achten Sie hierbei auf den Arbeitspunkt! **3 P.|**

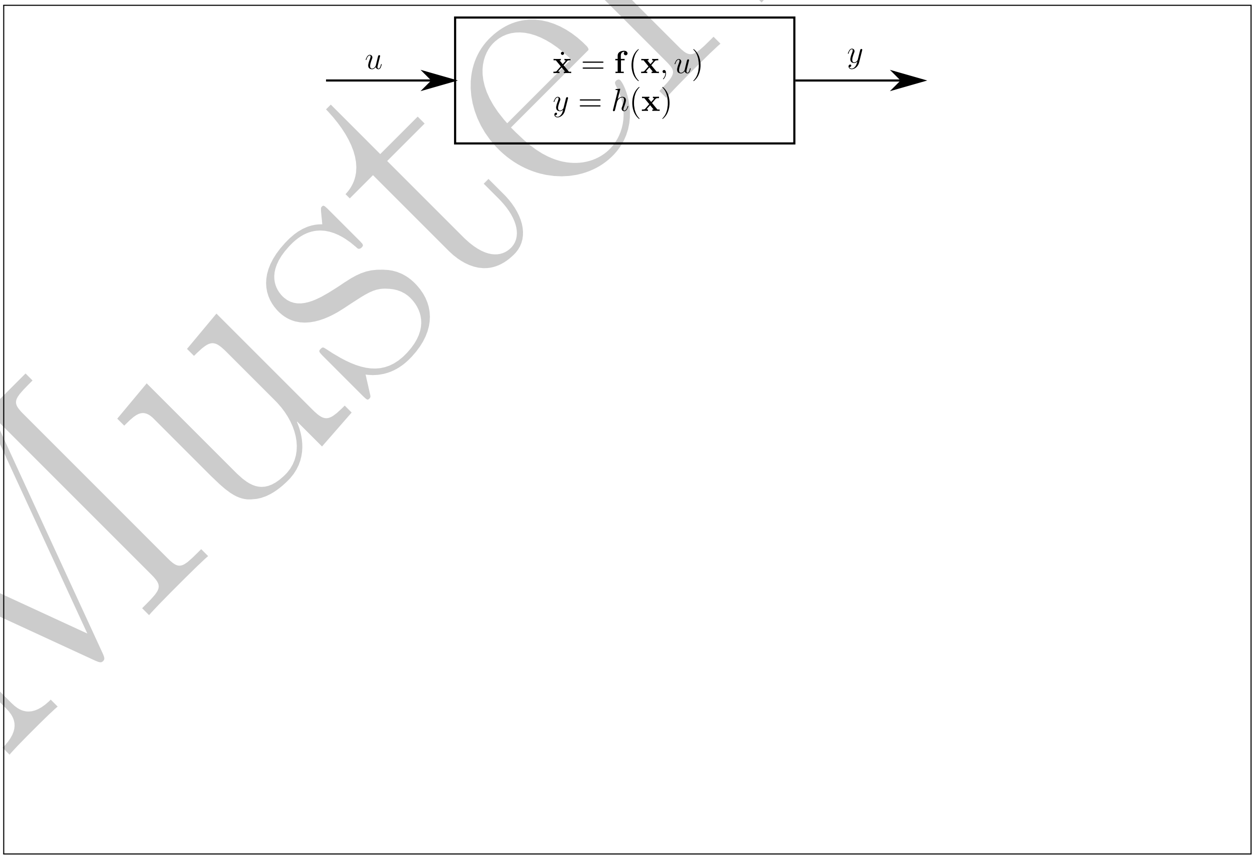

Abbildung 5: Abbildung zu Aufgabe 3.d)

Lösung:

a) *Nein.* $\mathbf{f}(\mathbf{x},u)$ *ist nichtlinear im Zustand* x_1 *und* $h(\mathbf{x},u)$ *ist nichtlinear in* x_3 *und besitzt einen Offset* e.

b) *Das System besitzt eine Ruhelage* $x_{1R} = \frac{a^2u_R^2}{b^2}$, $x_{2R} = \frac{a^5u_R^4}{b^4d}$, $x_{3R} = 0$.

c)

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{b^2}{2au_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2a^3u_R^2}{b^2} & -d & -c \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}$$

d) *Siehe Abbildung 6.*

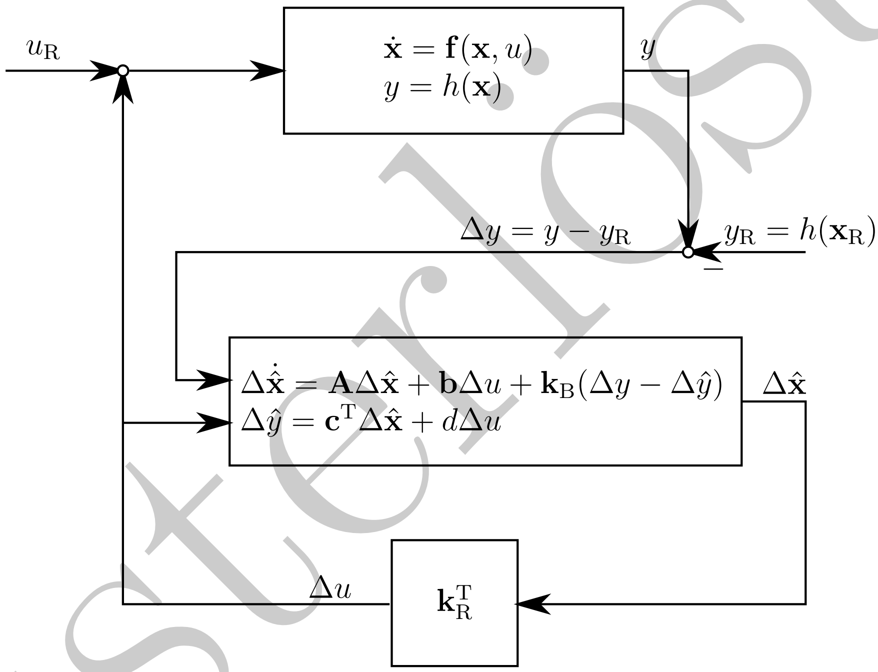

Abbildung 6: Lösung zu Aufgabe 3.d)

4. Folgende Aufgaben können unanbhängig voneinander gelöst werden **11 P.|**

a) Für das zeitdiskrete dynamische System **6 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ b & c & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

wurde ein Dead-Beat Regler mit dem Rückführungsvektor $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ entworfen.

i. Bestimmen Sie die Parameter a, b und c damit obige Aussage erfüllt ist. 3 P.|

ii. Bestimmen Sie das Gebiet in dem $x_{0,1}$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ liegen darf, damit die Stellgrößenbeschränkung $|u_k| < 12$ nicht verletzt wird. 3 P.|

Hinweis: Die Determinante einer 3×3-Matrix $\mathbf{A}$ lässt sich durch

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

berechnen.

b) Gegeben ist das in Abbildung 7 dargestellte System mit den Übertragungsmatrizen **5 P.|**

$$\mathbf{G}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & T(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{s+10} \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

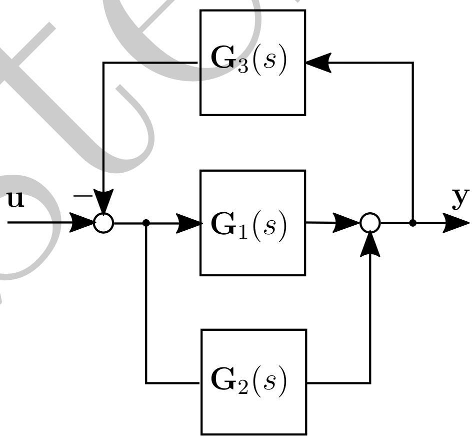

Abbildung 7: Blockdiagramm zu Aufgabe 4.b)

i. Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ vom Eingang $\mathbf{u}$ zum Ausgang $\mathbf{y}$. 3 P.|

ii. Bestimmen Sie $T(s)$ so, dass die Ausgänge entkoppelt sind, d.h. dass $\mathbf{G}(s)$ eine Diagonalstruktur aufweist. 2 P.|

Lösung:

a) i. *Dead-Beat Regler: Alle Pole des geschlossenen Regelkreises* $\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma} k^{\mathrm{T}}$ *müssen bei 0 liegen. D.h. für das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises muss* $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) = \lambda^3$ *gelten. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:* $a = -1$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = -4$.

ii. *Die Stellgröße ist durch* $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k$ *gegeben. Der Dead-Beat Regler regelt den Zustand in 3 Schritten zu 0, damit ist nur* u_0, u_1, u_2 *von Interesse, da* $\forall k > 2 : \; u_k = 0$. *Die Bedingungen* $u_0 = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_0 < 12$, $u_1 = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_1 < 12$, $u_2 = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_2 < 12$ *müssen somit erfüllt sein. Die Zustände lassen sich durch* $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{k}^{\mathrm{T}}) \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{k}^{\mathrm{T}}) \mathbf{x}_1$ *berechnen. Somit muss* $|x_{0,1}| < \frac{8}{7}$ *gelten.*

b) i. *Für die gesammte Übertragungsfunktion muss* $\mathbf{y} = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}$ *gelten. Aus dem Blockschaltbild lässt sich* $\mathbf{y} = (\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s))(\mathbf{u} - \mathbf{G}_3(s)\mathbf{y})$ *ablesen. Umformen ergibt* $\mathbf{y} = (\mathbf{E} + (\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s))\mathbf{G}_3(s))^{-1}(\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s))\mathbf{u}$ *und damit* $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{E} + (\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s))\mathbf{G}_3(s))^{-1}(\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s))$. *Durch Einsetzen ergibt sich* $\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)(s+10)} + \frac{s+3}{s} T(s) \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$.

ii. *Für eine Diagonalstruktur müssen die Einträge* $G_{1,2}(s) = G_{2,1}(s) = 0$ *sein. Aus* $G_{1,2}(s)$ *folgt* $T(s) = -\frac{1}{(s+1)(s+3)(s+10)}$.