

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 15.03.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und
- ... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

25.03.2019

26.03.2019

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 ist ein Regelkreis mit einem Freiheitsgrad dargestellt. Die zugehörigen Übertragungsfunktionen lauten

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 4}{s^2 + 8s - 9} \quad (1a)$$

$$G_d(s) = \frac{s + 20}{2(s^2 + 2s + 1)} \quad (1b)$$

$$R(s) = \frac{V_I \left(1 + \frac{s}{4}\right)}{s} \quad (1c)$$

mit dem Verstärkungsfaktor V_I des Reglers.

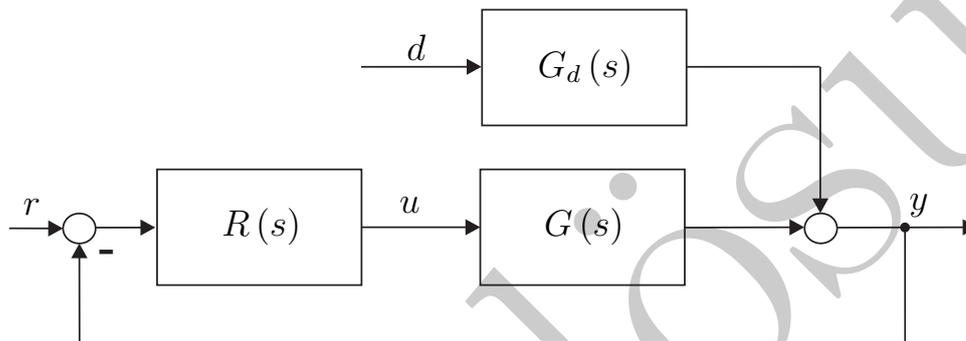


Abbildung 1: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad

Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- Zeichnen Sie den Amplituden- und Phasengang von $G_d(s)$ in Form einer Knickzugkennlinie in das beiliegende Bode-Diagramm. **2 P. |**
- Analysieren Sie die Übertragungsfunktionen $G(s)$ und $G_d(s)$ hinsichtlich BIBO-Stabilität, Sprungfähigkeit, Minimalphasigkeit und Realisierbarkeit. **2 P. |**
- Stellen Sie die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ und die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}(s)$ allgemein in Abhängigkeit der Zähler- und Nennerpolynome $z_i(s)$ und $n_i(s)$ mit $i = \{G, G_d, R\}$ auf. Setzen Sie anschließend für die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ die Terme aus (1) ein. **3 P. |**
- Ermitteln Sie mit Hilfe des Routh-Hurwitz Verfahrens für welche **positiven** Werte von V_I die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ BIBO-stabil ist. Ist die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}(s)$ für diese Werte von V_I ebenfalls BIBO-stabil? Argumentieren Sie ohne Rechnung! **3 P. |**

Name	
Matrikelnummer	

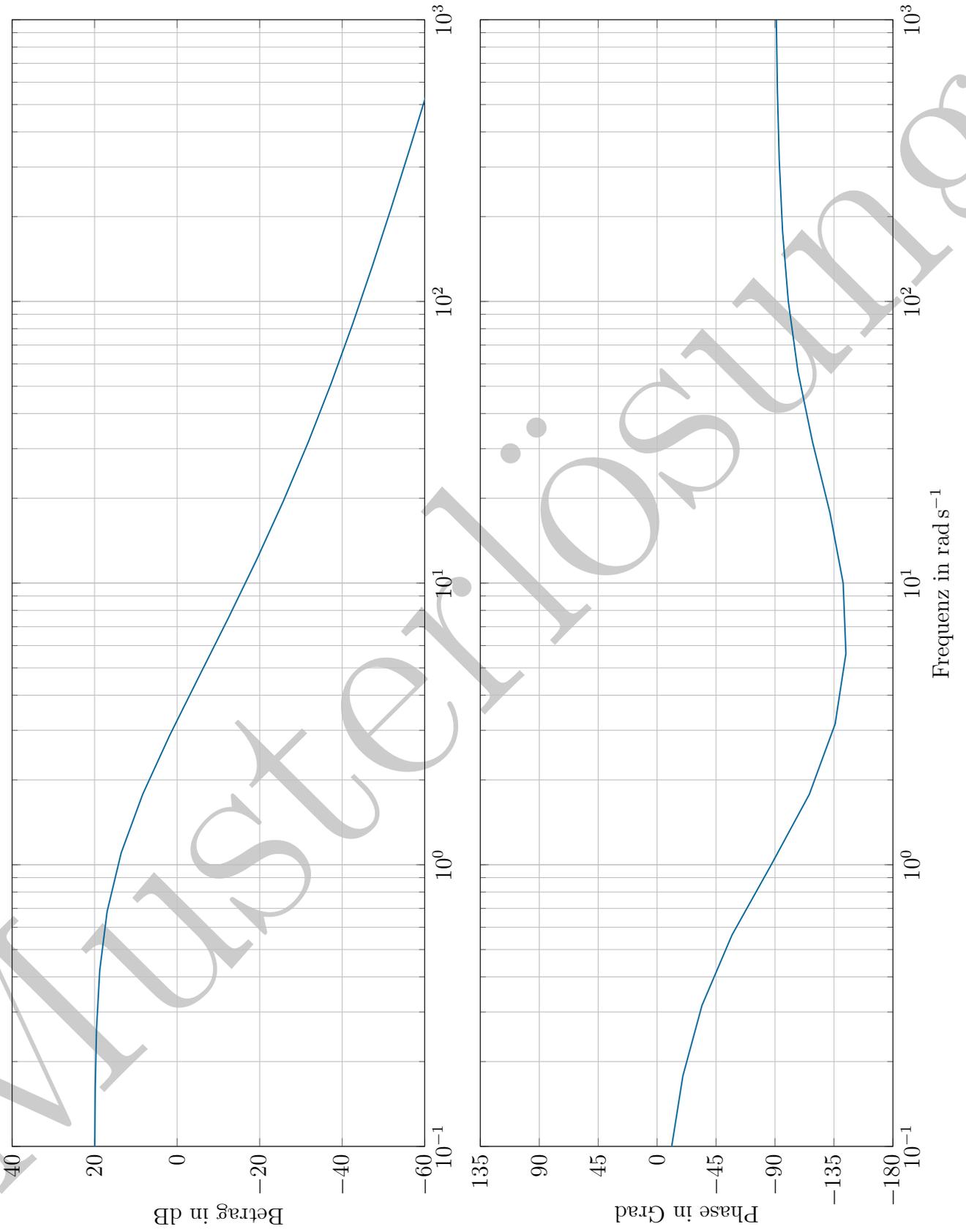


Abbildung 2: Vorlage Bode-Diagramm zu Aufgabe 1

Lösung:

- a) Siehe Bode-Diagramm.
b) $G(s)$ ist nicht BIBO-stabil, sprungfähig, nicht phasenminimal und realisierbar.
 $G_d(s)$ ist BIBO-stabil, nicht sprungfähig, phasenminimal und realisierbar.
c) Aus Automatisierungsskript Gleichungen 4.14

$$T_{r,y}(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{z_R(s)z_G(s)}{z_R(s)z_G(s) + n_R(s)n_G(s)} \quad (2a)$$

$$T_{d,y}(s) = \frac{G_d(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{z_{G_d}(s)n_R(s)n_G(s)}{(z_R(s)z_G(s) + n_R(s)n_G(s))n_{G_d}(s)} \quad (2b)$$

$$T_{r,y}(s) = \frac{s^3(V_I/4) + s^2(2V_I) + s(V_I + 1/4) + 4V_I}{s^3(V_I/4 + 1) + s^2(2V_I + 8) + s(5V_I - 9) + 4V_I} \quad (2c)$$

(2d)

- d) Zu prüfenden Bedingungen:

$$1 + V_I/4 > 0 \Rightarrow V_I > -4 \quad (3a)$$

$$8 + 2V_I > 0 \Rightarrow V_I > -4 \quad (3b)$$

$$-9 + 9/2V_I > 0 \Rightarrow V_I > 2 \quad (3c)$$

Damit ist das Nennerpolynom von (2a) ein Hurwitzpolynom. Da $n_{G_d}(s)$ ebenfalls ein Hurwitzpolynom ist, folgt unmittelbar aus (2b), dass $T_{d,y}(s)$ BIBO-stabil ist.

2. Folgende Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden: **10 P.**

a) Gegeben ist das autonome, lineare, zeitinvariante System der Form **5 P.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2\pi \\ -2\pi & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (4a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} . \quad (4b)$$

- i. Ist das System (4) vollständig beobachtbar? **1 P.**
- ii. Diskretisieren Sie das System (4) mit einer allgemeinen Abtastzeit T_a . **2 P.**
- iii. Stellen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(T_a)$ für das zeitdiskrete System in Abhängigkeit der Abtastzeit T_a auf und werten Sie diese anschließend für eine Abtastzeit von $T_a = 0.5 \text{ s}$ aus. Ist das zeitdiskrete System für die diese Abtastzeit vollständig beobachtbar? **2 P.**

b) Ein lineares, zeitdiskretes SISO-System ist durch **2 P.**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad (5a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (5b)$$

mit den Parametern a und b gegeben.

- i. Bestimmen Sie die zugehörige z -Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems (5). **1 P.**
 - ii. Für welche Werte der Parameter a und b ist das System (5) BIBO-stabil? **1 P.**
- c) Gegeben ist die zeitdiskrete Übertragungsfunktion **3 P.**

$$G(z) = \frac{-z^2 + 2z \cos(3T_a) - 1}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad (6)$$

und eine Eingangsfolge der Form

$$(u_k) = (6 \sin(\omega_0 k T_a)) \quad (7)$$

mit dem Parameter ω_0 .

Geben Sie mögliche Werte für $\omega_0 \neq 0$ an, für die die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwingenen Zustand verschwindet.

Lösung:

- a) i. Ja, da die Beobachtbarkeitsmatrix den vollen Rang hat.
ii. Das zugehörige zeitdiskrete System lautet:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} e^{-T_a} \cos(2\pi T_a) & e^{-T_a} \sin(2\pi T_a) \\ -e^{-T_a} \sin(2\pi T_a) & e^{-T_a} \cos(2\pi T_a) \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (8a)$$

$$y_k = [2 \quad 1] \mathbf{x}_k. \quad (8b)$$

- iii. Die Beobachtbarkeitsmatrix lautet

$$\mathcal{O}(T_a) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ e^{-T_a}(2 \cos(2\pi T_a) - \sin(2\pi T_a)) & e^{-T_a}(2 \sin(2\pi T_a) + \cos(2\pi T_a)) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ausgewertet für die Abtastzeit $T_a = 0.5$ s hat die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2e^{-0.5} & e^{-0.5} \end{bmatrix} \quad (10)$$

den Rang 1. Das System ist daher nicht vollständig beobachtbar.

- b) i.

$$G(z) = \frac{b(z + 7/3)}{(z - 2a)(z + 1/3)} \quad (11)$$

- ii. BIBO-stabil für $|a| < 0.5$ und b beliebig.

- c) Aus der eingeschwingenen Lösung ergibt sich $\omega_0 = 3$.

3. Das System in Abbildung 3 stellt einen Roboterarm mit einem nichtlinear elastischen Gelenk dar und wird durch die Differentialgleichungen 10 P. |

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = -c(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - d_1 \dot{\varphi}_1 + \tau \quad (12a)$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - mgl \cos(\varphi_2) - d_2 \dot{\varphi}_2 \quad (12b)$$

beschrieben. Die Variablen c, m, g, l, d_i und I_i ($i \in \{1, 2\}$) sind konstante Parameter des Systems mit dem Eingang $u = \tau$. Der Ausgang y des Systems sei der Winkel des Roboterarms $y = \varphi_2$.

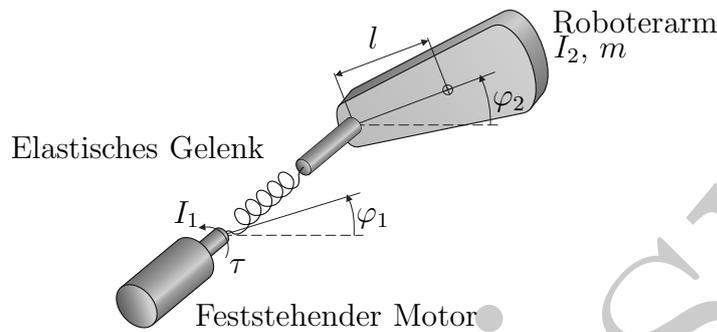


Abbildung 3: Elastisch angetriebener Roboterarm.

- a) Geben Sie den Zustandsvektor \mathbf{x} und die Zustandsdarstellung in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ für das System (12) an. 1 P. |
- b) Berechnen Sie **alle** Ruhelagen des Systems für $u_R = 0$. 1.5 P. |
- c) Linearisieren Sie das Systems um eine allgemeine Ruhelage (\mathbf{x}_R, u_R) und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearen Systems an. 2.5 P. |
- d) Wählen Sie eine beliebige Ruhelage (\mathbf{x}_R, u_R) aus Aufgabe b). Schließen Sie den Regelkreis des linearen Systems mit einem P-Regler für die Ruhelage (\mathbf{x}_R, u_R) mit der Reglerverstärkung K_P . Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des resultierenden autonomen Systems an und vereinfachen Sie die Gleichungen so weit wie möglich. 3 P. |
- e) Kann der Regler aus Aufgabe d) die Strecke stabilisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. 2 P. |
- Hinweis:** K_P muss dazu **nicht** berechnet werden.

Lösung:

a)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}, \quad u = \tau$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \frac{1}{I_1}(-c(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - d_1\dot{\varphi}_1 + \tau) \\ \dot{\varphi}_2 \\ \frac{1}{I_2}(c(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - mgl \cos(\varphi_2) - d_2\dot{\varphi}_2) \end{bmatrix}$$

$$y = \varphi_2$$

b)

$$\begin{aligned} \varphi_{1,R} &= \varphi_{2,R} \\ \varphi_{2,R} &= (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \dot{\varphi}_{1,R} &= 0 \\ \dot{\varphi}_{2,R} &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + d \Delta u \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_1} mgl \sin(\varphi_{2,R}) & -\frac{d_2}{I_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = 0$$

d) Ruhelage aus b) mit $k = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_1} mgl & -\frac{d_2}{I_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = 0$$

Um den Regelkreis zu schließen, wird der Ausgang des linearisierten System $\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x}$ mit negativem Vorzeichen zurückgeführt und damit der Regelfehler $e = -\Delta y$ gebildet. Der P-Regler in Zustandsraumdarstellung lautet $\Delta u = K_P e$. Zusammengesetzt zum geschlossenen Regelkreis ergibt dies

$$\Delta u = K_P e = -K_P \Delta y = -K_P \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} \quad K_P > 0$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A} - K_P \mathbf{b} \mathbf{c}^T)}_{\tilde{\mathbf{A}}} \Delta \mathbf{x}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_1}{I_1} & -\frac{K_P}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_1} mgl & -\frac{d_2}{I_2} \end{bmatrix}$$

e)

$$\det(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda \left(\frac{d_1}{I_1} + \lambda \right) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{d_2}{I_2} - \frac{mgl}{I_2} \right)$$

- Das charakteristische Polynom von $\tilde{\mathbf{A}}$ ist kein Hurwitz-Polynom, da der Term mit λ^0 fehlt durch das Produkt mit λ .
- Der Regler K_P kommt im charakteristischen Polynom nicht vor und kann daher die Systemdynamik von $\tilde{\mathbf{A}}$ nicht beeinflussen.

Musterlösungen

4. Gegeben sei das zeitkontinuierliche System

10 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (13a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (13b)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alle Unterpunkte a) bis c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Entwerfen Sie einen Zustandsregler für das System (13). Legen Sie die Pole des geschlossenen Kreises auf $\{-1, -1\}$.

2 P. |

Hinweis: Sie können diese Aufgabe auch ohne Formel von Ackermann lösen.

- b) Zeigen Sie, dass das Separationsprinzip auch für zeitkontinuierliche Regelkreise gilt, wenn der Zustandsregler mit einem vollständigen Luenberger Beobachter

4 P. |

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y} - y) \quad (14a)$$

$$\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} \quad (14b)$$

verwendet wird.

- c) Bei dieser Aufgabe soll schrittweise ein PI-Zustandsregler für das System (13) mit der Führungsgröße r aufgebaut werden.

4 P. |

- i. Erweitern Sie das System (13) um einen Fehlerzustand e , welcher den Regelfehler aufintegriert. Schreiben Sie das erweiterte System im Zustandsraum mit dem neuen Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ an.

1.5 P. |

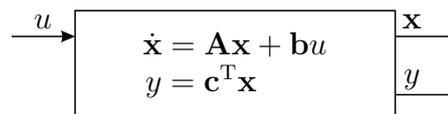
- ii. Geben Sie das Regelgesetz für einen Zustandsregler für das System aus Aufgabe i) mit der Führungsgröße r an.

1 P. |

Hinweis: Verwenden Sie den Rückführvektor $\tilde{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ k_e \end{bmatrix}$.

- iii. Ergänzen Sie das vorbereitete Blockschaltbild um den Integrator aus Aufgabe i) und den Zustandsregler aus Aufgabe ii). Beschriften Sie **alle** Verbindungen.

1.5 P. |



Lösung:

a)

$$u = \mathbf{k}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = -4$$

$$k_2 = -4$$

b)

$$u = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\ &= \dots = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Durch die Blockstruktur von $\tilde{\mathbf{A}}$ zerfällt das charakteristische Polynom in zwei separate Teile, d. h.

$$\det(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T - \lambda\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T - \lambda\mathbf{E}_n)$$

und die Pole des Zustandsreglers und des Zustandsbeobachters lassen sich separat über \mathbf{k} bzw. $\hat{\mathbf{k}}$ vorgeben.

c) i.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ r - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

ii.

$$u = \tilde{\mathbf{k}}^T \tilde{\mathbf{x}} + g(r - y) = \mathbf{k}^T \mathbf{x} + k_e e + g(r - \mathbf{c}^T \mathbf{x})$$

iii.

