

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 17.05.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und
- ... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie zur mündlichen Prüfung antreten könnten:

☐ 27.05.2019

☐ 28.05.2019

Viel Erfolg!

1. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P.

a)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (1)$$

- i. Entwerfen Sie für das erreichbare Teilsystem des Systems (1) einen Zustandsregler $u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_{e,k}$ so, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\lambda = \frac{1}{2}$ liegen. **3 P.**
 - ii. Ist das nicht-erreichbare Teilsystem stabil? **1 P.**
 - iii. Nehmen Sie nun weiters an, dass die Steuerfolge der Beschränkung $|u_k| \leq 7$ unterliegt. Hält der zuvor entworfene Zustandsregler für einen Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4]^T$ diese Beschränkung ein? Begründen Sie Ihre Antwort. **1.5 P.**
- b) Gegeben ist die Impulsantwort $(g_k) = (0, -1, 3, 3, 3, \dots)$ eines linearen, zeitinvarianten Abtastsystems mit $n = 3$ Zuständen.
- i. Bestimmen Sie die zur Eingangsfolge $(u_k) = (1, 0, -4, 1, 0, 0, 0, \dots)$ zugehörige Ausgangsfolge (y_k) . **1.5 P.**
 - ii. Prüfen Sie das System auf BIBO-Stabilität, Erreichbarkeit sowie Beobachtbarkeit. **3 P.**

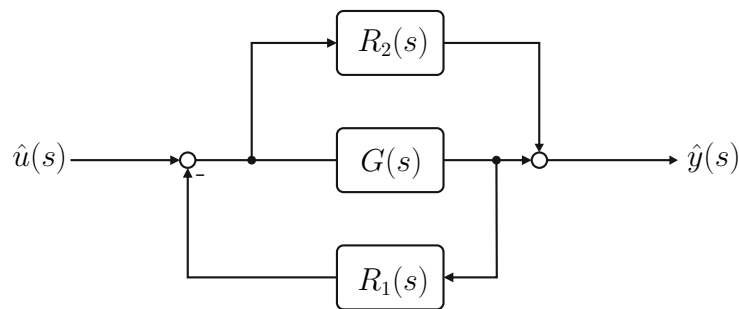
Lösung:

- a) i. $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
ii. $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{I}\sqrt{2} \Rightarrow |z_{1,2}| = \frac{3}{2} > 1$
iii. $u_k = \mathbf{k}^T \boldsymbol{\Phi}_{e,g}^k \mathbf{x}_{e,0} \Rightarrow u_3 = -\frac{29}{4} < -7$
- b) i. $(y_k) = (0, -1, 3, 7, -10, -6, -6, -6, \dots)$
ii. $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| \not< \infty \Rightarrow \text{nicht BIBO-stabil, } \det(\mathbf{H}[1, 2]) = 0$

2. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P.

a) Gegeben ist der folgende Regelkreis



mit den Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s-1}, \quad R_1(s) = \frac{K}{s+2}, \quad R_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

- i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{u,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$ **1 P.**
- ii. Bestimmen Sie den Wertebereich für K so, dass $T_{u,y}(s)$ BIBO stabil ist. **2 P.**
- iii. Bestimmen Sie für $K = 4$ die eingeschwungene Ausgangsgröße $y(t)$ zu der Eingangsgröße **3 P.**

$$u(t) = 2\sigma(t) + 2(1 - e^{-2t}) \sin(2t) .$$

b) Nehmen Sie einen einschleifigen Standardregelkreis mit den Übertragungsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{1+2s}, \quad R(s) = \frac{1}{sT_I}$$

an.

- i. Bestimmen Sie den Parameter T_I so, dass der geschlossene Kreis eine doppelte reelle Polstelle aufweist. **2 P.**
- ii. Nehmen Sie nun an, dass die Strecke eine Totzeit besitzt **2 P.**

$$G(s) = \frac{1}{1+2s} e^{-sT_t} .$$

Berechnen Sie für $T_I = \sqrt{2}$ die maximale Totzeit so, dass der geschlossene Kreis BIBO-stabil bleibt.

Lösung:

a) i. $T_{r,y} = \frac{G + R_2}{1 + GR_1} = \frac{2s(s+2)}{s^3 + 2s^2 + (K-1)s + K-2}$

ii. *Routh-Hurwitz liefert $K > 2$*

iii. $y(t) = 2\frac{4}{\sqrt{5}} \sin(2t - \arctan(2))$

b) i. $T_I = 8$

ii. $T_t = \frac{\pi}{2}$

3. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

10 P.

a) Gegeben ist das nichtlineare System

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{r^2}(u - 2r\dot{r}\dot{\theta} - gr \cos(\theta)) \quad (2a)$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) \quad (2b)$$

mit dem Eingang u , den Freiheitsgraden θ und r und dem konstanten Parameter g .

- i. Führen Sie einen Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und geben Sie das System (2) in der Form

2 P.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

an.

- ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems (2).
iii. Linearisieren Sie das System (2) um die Ruhelage ($\theta = 0, r_R = 1$) und stellen Sie das resultierende System in der Form

1.5 P.

2.5 P.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u$$

dar.

b) Gegeben ist das autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

mit der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- i. Ist dieses System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.
ii. Wie lautet die reelle Jordan-Form von (3)? Geben Sie die Zustandstransformation

1 P.

2 P.

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$$

an, die das System (3) auf Jordan-Form transformiert.

- iii. Geben Sie die Transitionsmatrix des transformierten Systems an.

1 P.

Lösung:

a) i.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ r \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{x_3^2}(u - 2x_3x_4 - gr \cos(x_1)) \\ x_4 \\ x_3x_2^2 - g \sin(x_1) \end{bmatrix}$$

ii.

$$x_{1,R} = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, x_{2,R} = 0, x_{3,R} = \text{beliebig}, x_{4,R} = 0, u_R = gx_{3,R}$$

iii.

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$$

$$\Delta u = u - u_R$$

$$\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) i. Das System ist asymptotisch stabil, da beide Eigenwerte negativen Realteil besitzen ($\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$).

ii.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

iii.

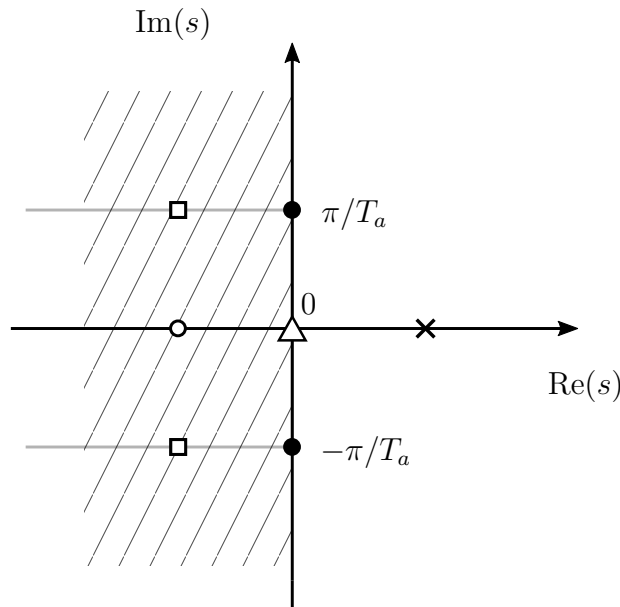
$$\Phi = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-3t) \end{bmatrix}$$

4. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben

10 P. |

- a) Skizzieren Sie zur gegebenen komplexen s-Ebene die zugehörige z-Ebene sowie die zugehörige q-Ebene, inklusive der dargestellten Punkte. Geben Sie die jeweiligen Abbildungsvorschriften zwischen s-Bereich und z-Bereich bzw. zwischen z-Bereich und q-Bereich an.

3 P. |



- b) Nehmen Sie an, dass die q -Übertragungsfunktion des Systems durch

4 P. |

$$G^\#(q) = \frac{1 + 4q}{q + 4q^2}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie für diese Strecke die Parameter $\rho > 0$, V_I und T_I des Reglers

$$R^\#(q) = \frac{V_I(1 + qT_I)}{q^\rho}$$

mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens so, dass der geschlossene Kreis folgenden Eigenschaften aufweist:

- Anstiegszeit $t_r = 3.6$ s
- $\ddot{u} = 10$ %
- $e_\infty|_{(r_k)=(1^k)} = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Approximation $\arctan(\frac{4}{3}) \approx 53^\circ$.

- c) Zeichnen Sie den Betrags- und Phasengang der Übertragungsfunktion

3 P. |

$$G(s) = \frac{-10^7 s^2 + 10^{11}}{10^5 s^2 + 25 \cdot 10^4 s + 10^7}$$

in der beiliegenden Vorlage.

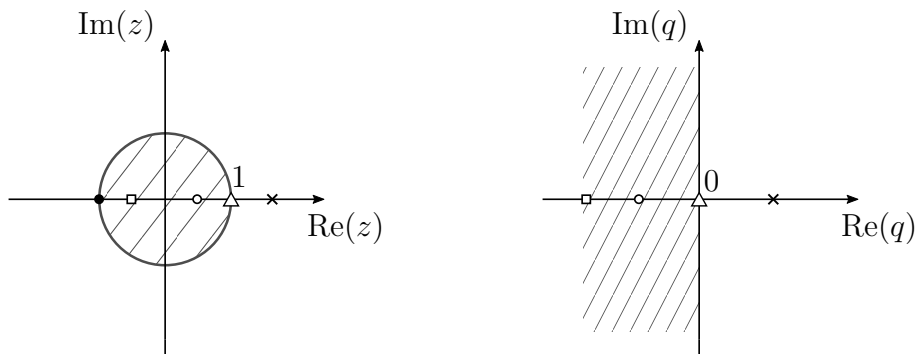
Lösung:

a) *Abbildungsvorschriften:*

$$z = \exp(sT_a)$$

$$q = \frac{2}{T_a} \frac{z - 1}{z + 1}$$

Die Punkte bei $\frac{\pi}{T_a}$ gehen im q -Bereich gegen unendlich.



b)

$$\rho = 1, T_I = 3\sqrt{3}, V_I = \frac{1}{18}$$

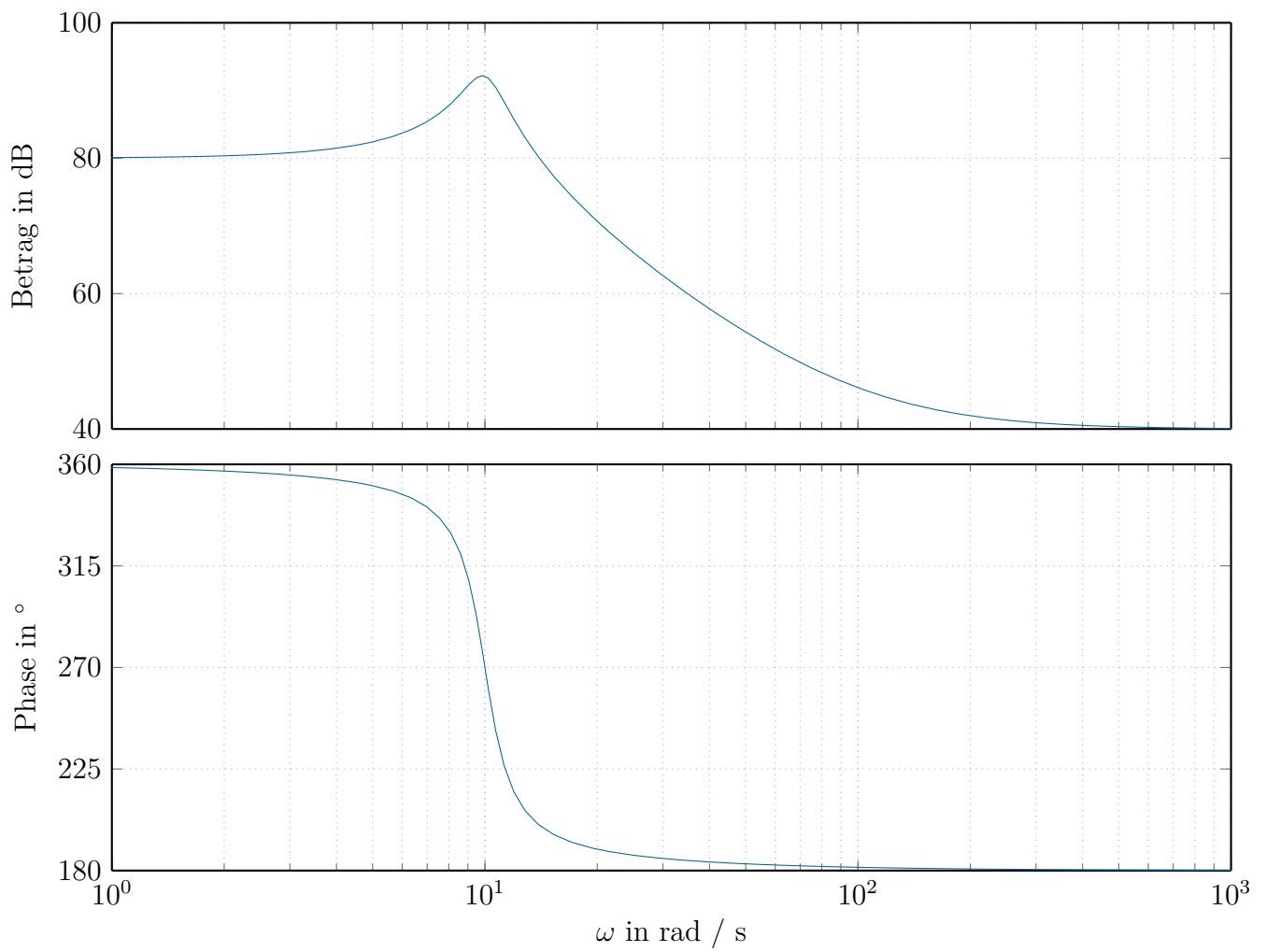


Abbildung 1: Betrags- und Phasengang zu Aufgabe 4 c)