Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 12.07.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	7	12	9	12	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... beachten Sie, dass die mündlichen Prüfungen am

22.07.2019 und 23.07.2019

stattfinden werden.

Viel Erfolg!

1. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. **7 P.|**

   a) Das mathematische Modell für eine Kugel an einer Feder in einem Luftstrom mit der Strömungsgeschwindigkeit v, wie in Abbildung 1 dargestellt, lautet **3 P.|**

$$\ddot{z}m = \frac{(v-\dot{z})^3}{|v-\dot{z}|}c_v A - mg + (z-z_0)k.$$

   Dabei bezeichnet z die Flughöhe und c_v, A, m, g, z_0 und k sind positive Konstanten.
   Die Strömungsgeschwindigkeit wird mit einem PI-Regler der Form

$$\begin{aligned} v &= (z-z_0)k_P + k_I e \\ \dot{e} &= z - z_0 \end{aligned}$$

   mit den positiven Konstanten k_I und k_P gestellt.

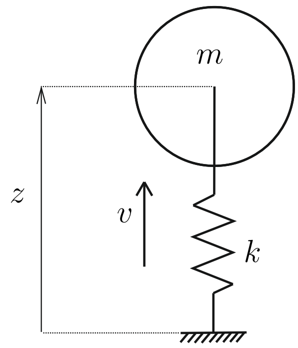

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Systems

      i. Stellen Sie das geregelte System als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung dar.
      ii. Bestimmen Sie die Ruhelage des geregelten Systems.

   b) Berechnen Sie für das System **4 P.|**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -K\sin x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

      i. die notwendige Trajektorie $\tilde{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$ und Stellgröße $\tilde{u}$, damit für den Ausgang $\tilde{y} = \omega t$ gilt. $K \neq 0$ und $\omega \neq 0$ sind dabei konstant.
      ii. Linearisieren Sie das System (1) um die Trajektorie gegeben durch $\tilde{\vec{x}}$, $\tilde{u}$ und $\tilde{y}$ und geben Sie das linearisierte System in der Form

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\vec{x}} &= \vec{A}(t)\Delta\vec{x} + \vec{b}(t)\Delta u, \\ \Delta y &= \vec{c}(t)\Delta\vec{x} \end{aligned}$$

      an.

Lösung:

a) i. Einsetzen des Regelgesetzes und Einführen der Zustände $z_1 = \dot{z}$, $z_2 = z$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{((z_2 - z_0)k_p + k_I e - z_1)^3}{|(z_2 - z_0)k_p + k_I e - z_1|}\frac{c_v A}{m} - g + (z_2 - z_0)\frac{k}{m},\\ \dot{z}_2 &= z_1,\\ \dot{e} &= z_2 - z_0.\end{aligned}$$

ii. Nullsetzen der Zeitableitung führt zu

$$\begin{aligned}0 &= z_{10}, \rightarrow z_{10} = 0\\ 0 &= z_{20} - z_0 \rightarrow z_{20} = z_0\\ 0 &= \frac{((z_0 - z_0)k_p + k_I e_0)^3}{|(z_0 - z_0)k_p + k_I e_0|}\frac{c_v A}{m} - g + (z_0 - z_0)\frac{k}{m} = \frac{(k_I e_0)^3}{|k_I e_0|}\frac{c_v A}{m} - g\end{aligned}$$

für die Bestimmung der Ruhelage des Reglerintegrators kann die letzte Zeile zu

$$\frac{(k_I e_0)^3}{|k_I e_0|} = \frac{gm}{c_v A}$$

umgeformt werden. Die rechte Seite der Gleichung ist positiv. Damit muss $\frac{(k_I e_0)^3}{|k_I e_0|}$ auch positiv sein. Das ist der Fall wenn e_0 positiv ist. Damit kann der Betrag aufgelöst werden und die Ruhelage des Zustandes e folgt zu

$$\frac{(k_I e_0)^3}{k_I e_0} = (k_I e_0)^2 = \frac{gm}{c_v A} \rightarrow e_0 = \sqrt{\frac{gm}{c_v A}}\frac{1}{k_I}.$$

b) i. Die Trajektorie und die Stellgröße lauten:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \omega\\ \tilde{x}_2 &= \omega t\\ \tilde{u} &= K\sin(\omega t)\end{aligned}$$

ii. Die Systemmatrix, der Eingangsvektor und der Ausgangsvektor lauten:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -K\cos(\omega t) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\ \vec{b} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\\ \vec{c} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. **12 P.**

a) Das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ wird mit dem Zustandsregelgesetz $u = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ geregelt. **6 P.**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

i. Berechnen Sie die Dynamikmatrix des geregelten, autonomen Systems.

ii. Diagonalisieren Sie die Dynamikmatrix des geregelten Systems und geben Sie die dafür notwendige Transformationsmatrix an.

iii. Berechnen Sie die Zustandstrajektorie des geregelten Systems für den Anfangszustand $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$ mit

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Skizzieren Sie die Sprungantworten der folgenden Systeme. Geben Sie die für die Skizze benötigten charakteristischen Größen inklusive Zahlwerten an. **4 P.**

i.

$$G_1(s) = \frac{5}{10 + s}$$

ii.

$$G_2(s) = \frac{0.25 + 2s}{0.25 + s}$$

iii.

$$G_3(s) = \frac{10 + s}{10s}$$

c) Es sei das vollständig erreichbare und beobachtbare System **2 P.**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ die Pole der zum System gehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ sind.

Lösung:

a) i. Die Dynamikmatrix des geregelten Systems lautet

$$\mathbf{A}_{res} = \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

ii. Die Eigenwerte und Eigenvektoren lauten:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

damit kann $\mathbf{A}_{res}$ diagonalisiert werden:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{res} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^{-1}\mathbf{A}_{res}[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2].$$

iii. Die Trajektorie errechnet sich zu

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]\mathrm{e}^{\tilde{\mathbf{A}}_{res}}[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.$$

b) i. PT1 Element mit $h(0) = 0$, $h(\infty) = 0.5$, Zeitkonstante $\tau = 0.1$, siehe Abbildung 2;

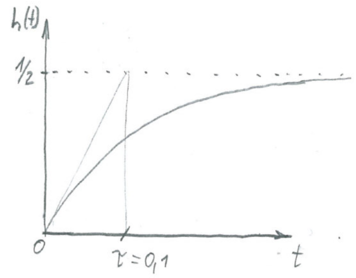

Abbildung 2: PT1 Element mit $h(0) = 0$, $h(\infty) = 0.5$, Zeitkonstante $\tau = 0.1$;

ii. Lead Glied mit $h(0) = 2$, $h(\infty) = 1$, Zeitkonstante $\tau = 4$, siehe Abbildung 3;

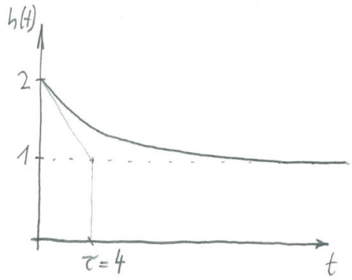

Abbildung 3: Lead Glied mit $h(0) = 2$, $h(\infty) = 1$, Zeitkonstante $\tau = 4$;

iii. PI Regler mit $h(0) = 0.1$, Steigung ab $t = 0$ ist 1, siehe Abbildung 4;

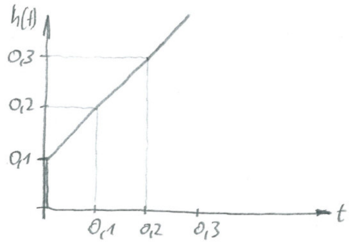

Abbildung 4: PI Regler mit $h(0) = 0.1$, Steigung ab $t = 0$ ist 1;

c)

$$G(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{b}}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}$$

Der Nenner entspricht der Determinante von $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$. Die Pole der Übertragungsfunktion sind somit die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

2. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. **9 P.**|

a) Beurteilen Sie die Übertragungsfunktionen **3 P.**|

$$G_1(s) = \frac{s^2 - s + 2}{(s+4)^3} \qquad\qquad G_2(s) = \frac{s+1}{s^2+3s}$$

bezüglich deren BIBO-Stabilität, Minimalphasigkeit und Sprungfähigkeit. Begründen Sie ihre Antworten ausführlich!

b) Gegeben ist die Sprungantwort eines linearen zeitinvarianten Systems $G(s)$ nach Abbildung 2: **2 P.**|

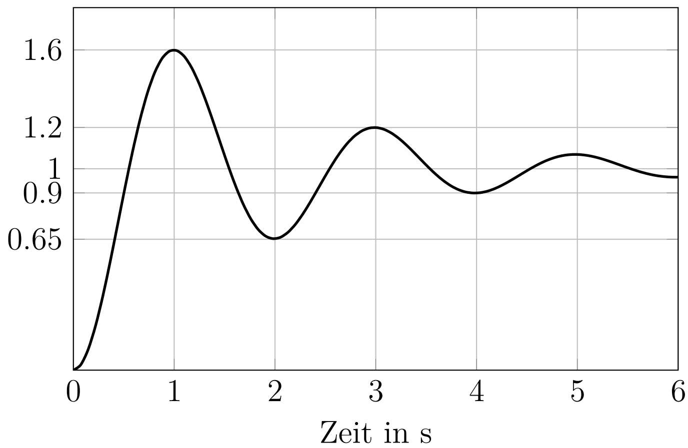

Abbildung 2: Sprungantwort eines linearen zeitinvarianten Systems $G(s)$.

Das zugehörige zeitdiskrete System $G(z)$ wird mit einer Abtastzeit von $T_a = 1\,\mathrm{s}$ abgetastet. Wie lautet die Impulsantwort (g_k) des Abtastsystems für die ersten 5 Abtastschritte $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$?

c) Betrachten Sie den kaskadierten Regelkreis in Abbildung 3. **4 P.**|

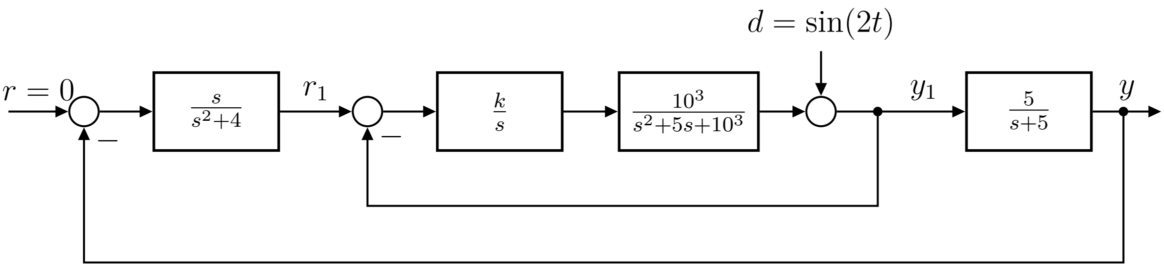

Abbildung 3: Kaskadierter Regelkreis.

i. Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist der innere Regelkreis BIBO-stabil?

ii. Nehmen Sie nun vereinfachend an, dass für die Übertragungsfunktion T_{r_1,y_1} und T_{d,y_1} gilt:

$$T_{r_1,y_1} = \frac{\hat{y}_1}{\hat{r}_1} = \frac{1}{s+1} \qquad\qquad T_{d,y_1} = \frac{\hat{y}_1}{\hat{d}} = \frac{s}{s+1}.$$

Geben Sie für diese Übertragungsfunktionen des inneren Regelkreises die Übertragungsfunktion T_{d,r_1} des kaskadierten Regelkreises an.

iii. Berechnen Sie die Referenzgröße $r_1(t)$ im eingeschwungenen Zustand.

Lösung:

a)
- $G_1(s)$ *ist BIBO-stabil, nicht minimalphasig und nicht sprungfähig.*
- $G_2(s)$ *ist nicht BIBO-stabil, nivht minimalphasig und nicht sprungfähig.*

b) Die Impulsantwort folgt zu

$$(g_k) = (0, 1.6, -0.95, 0.55, -0.3, \dots).$$

c)
i. *Die Anwendung der Routh-Hurwitz-Verfahrens liefert* $0 < k < 5$.

ii. *Mit den angegebenen Übertragungsfunktionen des inneren Regelkreises erhält man*

$$T_{d,r_1} = -\frac{5s^2}{(s^2+4)(s+5)(s+1)+5s}.$$

iii. *Mit der Übertragungsfunktion aus ii. erhlät man* $r_1(t) = 2\sin(2t - \pi/2)$.

3. Bearbeiten Sie die folgenden Unterpunkte. Die Punkte sind unabhängig voneinander lösbar. **12 P.|**

   a) Geben Sie für die Übertragungsfunktion **2 P.|**

$$G(z) = \frac{9z^2 - 6z + 2}{4z^4 - 8z^3 + 8z^2 - 4z + 1}$$

   eine für den Beobachterentwurf passende Minimalrealisierung an. Begründen Sie ihre Wahl ausführlich!

   b) Für eine zu regelnde diskrete Strecke mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ verlangt die Spezifikation an den geschlossenen Kreis eine Anstiegszeit von $t_r = 0.3\,\mathrm{s}$. Zusätzlich resultiert aus den Anforderungen eine notwendige Phasenanhebung von $45°$ und eine Betragsabsenkung von $20\,\mathrm{dB}$. Zur Erfüllung der Anforderungen soll ein DT1-Regler der Form **3 P.|**

$$R^{\#}(q) = V_R \frac{q}{1 + qT_R}$$

   eingesetzt werden.

      i. Berechnen Sie die Größen V_R und T_R.
      ii. Ist der angegebene Regler für beliebige $T_R > 0$ realisierbar? Begründen Sie ihre Antwort ausführlich!

   c) Gegeben ist der zeitdiskrete Regelkreis aus Abbildung 4. **7 P.|**

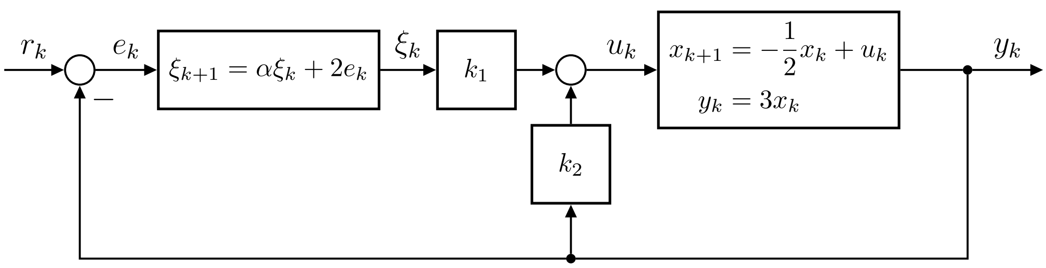

Abbildung 4: Zeitdiskreter Regelkreis.

      i. Bestimmen Sie den Parameter α derart, dass der Regelkreis der Anforderung nach stationärer Genauigkeit genügt (d.h. $\lim_{k\to\infty} y_k = r_s$ für $r_k = r_s(1)^k$). Gehen Sie dazu von einem intern stabilen geschlossenen Regelkreis und $k_1, k_2 \neq 0$ aus.
      ii. Berechnen Sie die Reglerparameter k_1 und k_2 derart, dass der geschlossene Kreis Dead-Beat Verhalten aufweist.
      iii. Bestimmen Sie für eine konstante Führungsgröße $r_k = (1)^k$ die stationären Zustände $\xi_k = \xi_s$ und $x_k = x_s$ des Regelkreises.
      iv. Wie viele Abtastschritte benötigt der geschlossene Regelkreis, um einen gegebenen Anfangszustand ξ_0, x_0 in die Ruhelage überzuführen? Begründen Sie ihre Antwort!

Lösung:

a) i. *Die Beobachtbarkeitsnormalform von $G(z)$ folgt zu*

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) i. *Die genannte Spezifikation erfordert $V_R = 1/4$ und $T_R = \sqrt{2}/40$.*

ii. *Der angegebene Regler ist für beliebige $T_R > 0$ realisierbar.*

c) i. *Für stationäre Genauigkeit muss $\alpha = 1$ gelten.*

ii. *Für Dead-Beat Verhalten muss $k_1 = 1/6$ und $k_2 = -1/6$ gelten.*

iii. *Der stationäre Zustand ergibt sich zu $\xi_s = 4$ und $x_s = 1/3$.*

iv. *Der Regelkreis wird in höchstens zwei Abtastschritten in die Ruhelage übergeführt.*