Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 08.11.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	11	9	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... beachten Sie, dass die mündlichen Prüfungen am

15.11.2019, 18.11.2019 und 19.11.2019

stattfinden werden.

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: 10 P.|

   a) Gegeben ist das nichtlineare System

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \sin(x_1 + x_3\pi), & x_1(0) &= x_{1,0} \\
\dot{x}_2 &= -x_3 - u^2, & x_2(0) &= x_{2,0} \\
\dot{x}_3 &= x_3^3 + x_2^2 + 2x_2 + 9, & x_3(0) &= x_{3,0}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$y = 2\ln(-0.5x_3)$$

      i. Berechnen Sie **alle** Ruhelage x_{1R}, x_{2R}, x_{3R} und u_R für $y_R = 0$. 1 P.|

      ii. Linearisieren Sie das System (1) um eine allgemeine Ruhelage $\mathbf{x}_R$ und schreiben Sie das System in der Form 2 P.|

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta u \\
\Delta y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u
\end{aligned} \tag{2}$$

      an. Geben Sie zudem $\Delta\mathbf{x}_0$ an.

   Lösung:

      i. $x_{3R} = -2, x_{2R} = -1, x_{1R} = l\pi, l \in \mathbb{Z}, u_{R,1} = \sqrt{2}, u_{R,2} = -\sqrt{2}$

      ii. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{2R}\cos(x_{1R} + x_{3R}\pi) & \sin(x_{1R} + x_{3R}\pi) & x_{2R}\pi\cos(x_{1R} + x_{3R}\pi) \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2x_{2R} + 2 & 3x_{3R}^2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2u_R \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{x_{3R}} \end{bmatrix}$, $d = 0$,

$$\Delta\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \Delta x_{1,0} \\ \Delta x_{2,0} \\ \Delta x_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,0} - x_{1,R} \\ x_{2,0} - x_{2,R} \\ x_{3,0} - x_{3,R} \end{bmatrix}$$

   b) Gegeben ist die in Abbildung 1 dargestellte Sprungantwort eines P-T2-Glieds sowie die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ bis $G_5(s)$. Welche der fünf Übertragungsfunktionen beschreibt das angegebene Sprungverhalten. Begründen Sie auch für alle anderen Übertragungsfunktionen, warum diese nicht auf die abgebildete Sprungantwort führt. 2.5 P.|

$$G_1(s) = \frac{0.05}{0.01 + 0.02s + s^2} \qquad G_2(s) = \mathrm{e}^{-30s}\frac{0.05}{0.01 + 0.02s + s^2}$$

$$G_3(s) = \mathrm{e}^{-30s}\frac{0.5}{0.01 + 0.02s + s^2} \qquad G_4(s) = \mathrm{e}^{-30s}\frac{0.05}{0.01 + 0.2s + s^2}$$

$$G_5(s) = \mathrm{e}^{-30s}\frac{500}{100 + 2s + s^2}$$

   Lösung:
   Schwingungsperiode $T \approx 62.8$. $\omega_0 = 0.1\mathrm{s}^{-1}$, Korrekt ist G_2. 1. Totzeit fehlt, 3. Verstärkung falsch 4. nicht schwingungsfähig 5. ω_0 passt nicht

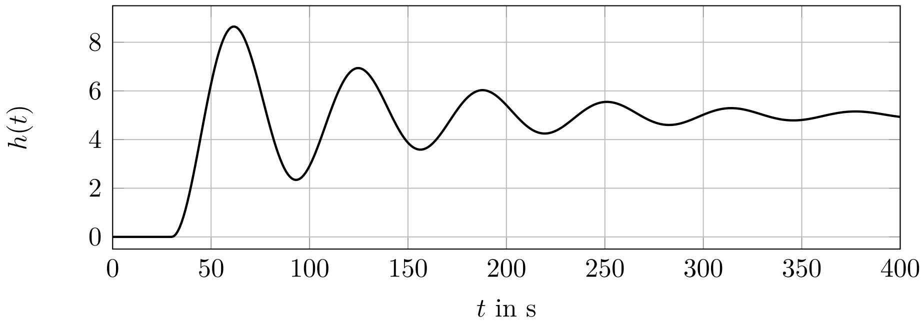


Abbildung 1: Sprungantwort des P-T2-Glieds.

c) Gegeben ist ein System mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = 4\frac{(2-10s)}{(s+10)\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)}e^{-2s} \tag{3}$$

und dem Eingang u. Das System wird nun mit

$$u(t) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\sin\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{t^2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right)\sigma(t) \tag{4}$$

angeregt. *Hinweis:* Die folgenden Unterpunkte sind unabhängig voneinander lösbar.

i. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Ausgangs $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand, wenn das System (3) mit $u(t)$ gemäß (4) beaufschlagt wird. 2.5 P.|

ii. Dem System $F(s)$ wird um ein Notch-Filter $N(s)$ der Form 2 P.|

$$N(s) = \frac{1 + \frac{1}{a}\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}{1 + a\frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

nachgeschaltet. Wie müssen die Parameter ω_0 und a von $N(s)$ gewählt werden, damit die Auswirkungen der harmonischen Teile von $u(t)$ gemäß (4) im eingeschwungenen Zustand um einen Faktor 10 in $\widetilde{y}(t)$ mit $\widetilde{y}(s) = N(s)\,F(s)\,u(s)$ reduziert werden.

Lösung:
1.d, ii,

$$y(t) = \frac{4}{15} + |F(j2)|\frac{2}{5}\sin\left(2t + \frac{2\pi}{3} + \arg(F(j2))\right) \tag{5}$$

mit

$$|F(j2)| = \frac{4\sqrt{404}}{\sqrt{104}\sqrt{\frac{7}{3}}},$$

$$\arg(F(j2)) = \arctan(-10) - \arctan\left(\frac{2}{10}\right) - \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 4.$$

1.d, iii, $\omega_0 = 2$ ist gemäß der anregenden Frequenz in (4) zu wählen und a ergibt sich demgemäß zu $a = \sqrt{10}$.

2. Bearbeiten Sie die folgenden Unterpunkte. 11 P.|

In diesem Beispiel soll eine Regelung für eine Ausgangsspannungsstabilisierung für einen zweiphasigen Buck-Converter, welcher in Abbildung 2 dargestellt ist, entworfen werden.

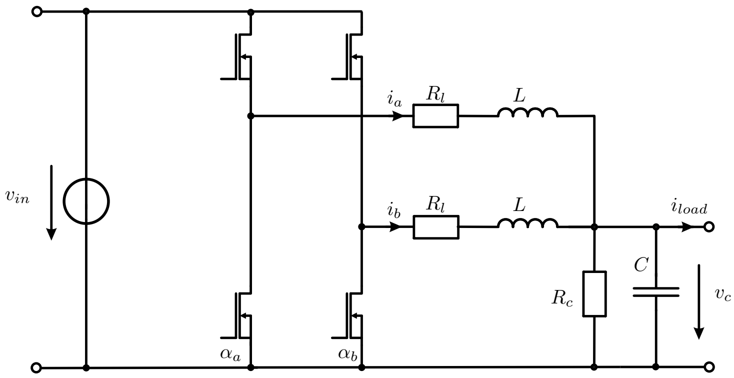


Abbildung 2: Topologie des zweiphasigen Buck Converters.

Über die Systemgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_a &= \frac{1}{L}\left(\alpha_a v_{in} - R_l i_a - v_c\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_b &= \frac{1}{L}\left(\alpha_b v_{in} - R_l i_b - v_c\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_c &= \frac{1}{C}\left(i_a + i_b - i_{load} - \frac{v_c}{R_c}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

mit den Zuständen $\tilde{\mathbf{x}} = [i_a, i_b, v_c]^{\mathrm{T}}$, der Stellgröße $\tilde{\mathbf{u}} = [\alpha_a, \alpha_b]^{\mathrm{T}}$ mit $\{\alpha_a, \alpha_b\} \in [0, 1]$ (Tastverhältnis der Halbbrücke) und den Größen $w = i_{load}$ sowie den Parametern v_{in}, L, R_l, C, R_c lässt sich das Verhalten des Wandlers beschreiben.

a) Transformieren Sie das System (7) auf die neuen Zustände $\mathbf{x} = [i_\Sigma, \Delta i, v_c]^{\mathrm{T}}$ mit $i_\Sigma = i_a + i_b$ und $\Delta i = i_a - i_b$ unter Verwendung der neuen Eingänge $\mathbf{u} = [\alpha_\Sigma, \Delta\alpha]^{\mathrm{T}}$ mit $\alpha_a = \alpha_\Sigma + \Delta\alpha/2$ und $\alpha_b = \alpha_\Sigma - \Delta\alpha/2$. Geben sie dazu die Transformationsmatrix $\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}$ sowie deren Inverse $\mathbf{V}^{-1}$ an und formulieren sie das transformierte System in einer Zustandsraumdarstellung der Form 3 P.|

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_w w \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{D}_w w
\end{aligned} \tag{8}$$

mit $\mathbf{y} = [i_\Sigma, \Delta i, v_c]^{\mathrm{T}}$.

Lösung:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_l}{L} & 0 & -\frac{2}{L} \\ 0 & -\frac{R_l}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{R_c C} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2v_{in}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{v_{in}}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Berechnen Sie allgemein (keine Zahlenwerte einsetzen) die Übertragungsfunktion $G_{v_c,\alpha_\Sigma}(s) = \frac{\hat{v}_c(s)}{\hat{\alpha}_\Sigma(s)}$ und berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_0 sowie die Dämpfungskonstante ζ. 3 P.

Lösung:

$$\mathbf{G}_{v_c,\alpha_\Sigma} = \frac{\frac{2v_{in}}{2+\frac{R_l}{R_c}}}{1 + s\left(\frac{\frac{1}{R_c C}+\frac{R_l}{L}}{\frac{2}{LC}+\frac{R_l}{L}\frac{1}{R_c C}}\right) + s^2 \frac{1}{\frac{2}{LC}+\frac{R_l}{L R_c C}}}$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC} + \frac{R_l}{L R_c C}}$$

und

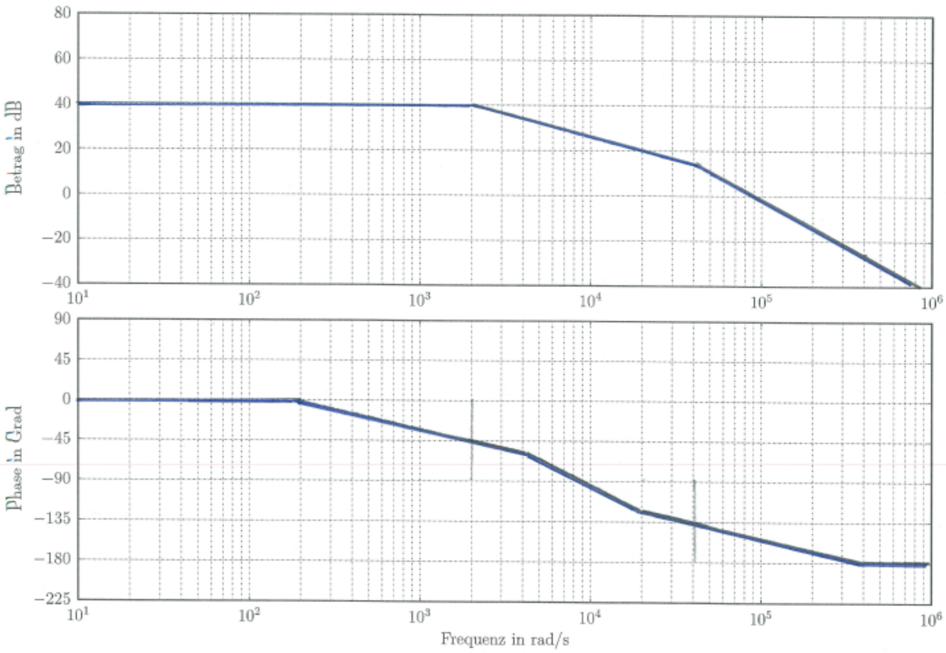
$$\zeta = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{\frac{1}{R_c C} + \frac{R_l}{L}}{\frac{2}{LC} + \frac{R_l}{L}\frac{1}{R_c C}}\right)$$

c) Verwenden Sie im Weiteren 2 P.|

$$G_{v_c,\alpha_\Sigma}(s) = \frac{800}{\left(2 + \frac{s}{10^3}\right)\left(4 + \frac{s}{10^4}\right)}. \tag{2}$$

Zeichnen Sie den Amplituden- und Phasengang für $G_{v_c,\alpha_\Sigma}(s)$ in Form einer Knickzugkennlinie in das beigefügte Bodediagramm.

Lösung:



d) Entwerfen Sie für $G_{v_c,\alpha_\Sigma}(s)$ von (2) einen zeitkontinuierlichen PI-Regler $R(s)$ zur Spannungsregelung von v_c mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens, welcher folgende Anforderungen erfüllt 3 P.|

- Anstiegszeit $t_r = 0.75\text{ms}$
- Überschwingen ü = 10%

Hinweis: Verwenden Sie dabei $\arctan(0.1) \approx 0°$.

Lösung:

$$T_I = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 * 10^3}$$

und

$$V_I = \frac{\sqrt{2}\sqrt{401}}{\sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2}}$$

3. Gegeben ist ein zeitdiskretes System in Form der Differenzengleichung 10 P.|

$$y_k - \frac{1}{4}y_{k-1} = u_k + \frac{1}{2}u_{k-1}, \qquad y_{-1} = 0, \quad u_{-1} = 0$$

mit der Eingangsgröße u_k und der Ausgangsgröße y_k.

a) Berechnen Sie die Impulsantwort im Folgenbereich (g_k) in geschlossener Form. 2 P.|

b) Geben Sie zu obigem System ein System von Differenzengleichungen erster Ordnung der Form 2 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \tag{2a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k \tag{2b}$$

an.

Hinweis: Führen Sie als Zustandsgröße

$$x_k = \frac{1}{4}y_{k-1} + \frac{1}{2}u_{k-1}$$

ein.

c) Die Strecke beschrieben durch die Differenzengleichung (2) wird mit einem diskreten Integralregler geregelt. Wie sieht die Zustandsdarstellung des diskreten Integralreglers mit dem Regelfehler $e_k = r_k - y_k$ als Eingang und dem Ausgang u_k aus? 2 P.|

d) Nehmen Sie an, die Strecke (2) wird durch die folgende Differenzengleichung 4 P.|

$$x_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k - \frac{3}{2}u_k$$

$$y_k = \frac{1}{3}x_k + u_k$$

beschreiben. Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung des mit dem Integralregler aus Unterpunkt (c) geschlossenen Kreises. Können die Eigenwerte des geschlossenen Kreises mit dem Reglerparameter k_I beliebig platziert werden? Begründen Sie Ihre Antwort. Für welche k_I ist der geschlossene Kreis stabil?

Lösung:

a) Mit $(u_k) = (1, 0, 0, \dots)$ lauten $g_0 = 1$, $g_1 = 3\frac{1}{4}$, $g_2 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2$ und somit $(g_k) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^k - 2\delta_k$ für $k = 0, 1, 2, \dots$.

b) $\mathbf{x}_k = x_k$, $\mathbf{\Phi} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{\Gamma} = \frac{3}{4}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = 1$, $d = 1$.

c) $x_{I,k+1} = x_{I,k} + e_k$, $u_k = k_I x_{I,k}$

d) Die Zustandsdarstellung des geschlossenen Kreises lautet mit $\mathbf{z}_k = [x_k \ x_{I,k}]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}k_I \\ -\frac{1}{3} & 1 - k_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_k, \quad y_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & k_I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}_k.$$

Das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises lautet $p_g(z) = z^2 + (k_I - \frac{1}{2})z - \frac{1}{2}$. Man erkennt, dass mit nur einem Reglerparameter k_I die zwei Koeffizienten von $p_g(z)$ nicht beliebig festgelegt werden können. Durch die Anwendung des Jury-Verfahrens ergibt sich $k_I \in (0, 1)$.

4. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinandere gelöst werden. 9 P.|

a) Betrachten Sie folgendes System mit der Abtastzeit $T_a = 1$. Auf dieses System wirkt eine Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$. Skizzieren Sie den Verlauf der Signale $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$. Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge (x_k). 4 P.|

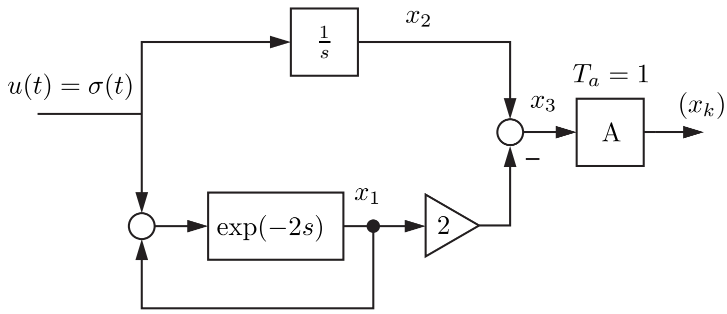


Abbildung 3: Abtastsystem.

b) Gegeben ist folgendes zeitdiskretes System mit den Parametern a und b: 3 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \qquad y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

Bestimmen Sie den Wertebereich der Parameter a und b so, dass das System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist.

c) Wird ein lineares zeitinvariantes System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ mit 2 P.|

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mit einer Abtatzeit T_a abgetastet, ergibt sich ein zeitdiskretes Abtastsystem $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}(T_a)\mathbf{x}_k + \mathbf{h}(T_a)u_k$. Welche der angegebenen Matrizen beschreibt die Dynamik des zeitdiskreten Systems? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{\Phi}_1(T_a) = \begin{bmatrix} 1 & T_a & T_a - 1 - e^{-T_a} \\ 0 & 1 & 1 - e^{-T_a} \\ 0 & 0 & e^{-T_a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_2(T_a) = \begin{bmatrix} 1 & 2 - T_a e^{-T_a} - 2e^{-T_a} & 1 - T_a e^{-T_a} - e^{-T_a} \\ 0 & T_a e^{-T_a} + e^{-T_a} & T_a e^{-T_a} \\ 0 & -T_a e^{-T_a} & -T_a e^{-T_a} + e^{-T_a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_3(T_a) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^{T_a} - \frac{1}{2}e^{-T_a} & -1 + \frac{1}{2}e^{T_a} + \frac{1}{2}e^{-T_a} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{T_a} + \frac{1}{2}e^{-T_a} & \frac{1}{2}e^{T_a} - \frac{1}{2}e^{-T_a} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{T_a} - \frac{1}{2}e^{-T_a} & \frac{1}{2}e^{T_a} + \frac{1}{2}e^{-T_a} \end{bmatrix}$$

Lösung:

a) Die Signalverläufe sind in Abbildung 4 dargestellt. Die z-Transformation der Folge (x_k) ergibt sich zu $x_z(z) = \frac{z}{z^2-1}$.

b) b beliebig, $a \neq 0$.

c) Durch Transformation der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ ins zeitdiskrete System kann man zeigen, dass $\Phi_2(T_a)$ die richtige Antwort ist.

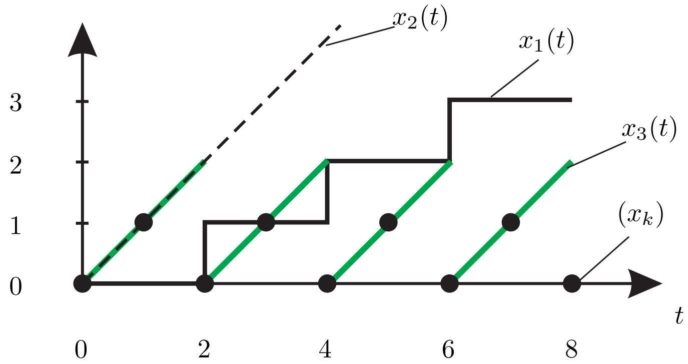


Abbildung 4: Signalverläufe.