Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 07.02.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	9	12	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... beachten Sie, dass die mündlichen Prüfungen am

14.02.2020, 17.02.2020 und 18.02.2020

stattfinden werden.

Viel Erfolg!

1. Bearbeiten Sie folgende Punkte. Diese sind unabhängig voneinander lösbar. **9 P.**|

a) Geben Sie für die folgenden Systeme 1) bis 4) mit dem Zustand x_1, x_2, x_3 und dem Eingang u an, ob diese linear/nichtlinear oder/und zeitvariant/zeitinvariant sind. Begründen Sie Ihre Aussagen. **2 P.**|

$$1)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \cos(x_2)x_2 \\ x_2 + u \end{bmatrix}$$

$$2)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 - 2x_2 \\ -4x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$3)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 17x_2 \\ x_3 + 4x_1 + \sin(t)x_2 \\ x_2 + 3x_3 + u^2 \end{bmatrix}$$

$$4)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 + 2x_2 \\ 14t - 3x_3 + x_1 \\ x_1^3 + x_2 \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie für das System **1 P.**|

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ v \\ p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v \\ -dv + u \\ \frac{p}{l_0 + x}(-v + q) \end{bmatrix} \\ y &= x \end{aligned} \tag{1}$$

mit $d > 0$, $l_0 > 0$ und $q = 0$ alle Ruhelagen an.

c) Linearisieren Sie das System (1) um die allgemeine Ruhelage $\mathbf{z}_R^T = \begin{bmatrix} x_R & v_R & p_R \end{bmatrix}$ und $u_R = u_0$. Geben Sie das linearisierte System in der Form **2 P.**|

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2}$$

an.

d) Von einem linearen System der Form (2) mit $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ und $\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist die Transitionsmatrix **2 P.**|

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{5}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}}{2} & \frac{-e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{5}{2}t}}{4} \\ -e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{5}{2}t} & \frac{e^{-\frac{5}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}}{2} \end{bmatrix}$$

bekannt. Berechnen Sie die zugehörige Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ sowie die Inverse der Transitionsmatrix $\Phi^{-1}(t)$.

e) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **2 P.**|

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{5(1+s)(1 + \frac{s}{200} + \frac{s^2}{400})(s-3)}{(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100})(1 + 15s)(1 + 3s)} \;.$$

Berechnen Sie den Anfangswert ($t \to +0$) sowie den Endwert ($t \to \infty$) bei sprungförmiger Anregung $u(t) = \sigma(t)$. Ist bei rampenförmiger Anregung eine Aussage über den Anfangswert bzw. Endwert möglich? Wenn ja, berechnen Sie diese Werte.

Lösung:

a) *i)* *nicht linear, zeitinvariant*
ii) *linear, zeitinvariant*
iii) *nicht linear, zeitvariant*
iv) *nicht linear, zeitvariant*

b) $\dot{x} = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow \dot{v} = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow p$ *beliebig und* $x \neq -l_0$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ -\frac{p_R}{(l_0+x_R)^2}(-v_R+q) & -\frac{p_R}{l_0+x_R} & \frac{1}{l_0+x_R}(-v_R+q) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$A = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)\right)\bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{\frac{5}{2}t}+e^{\frac{1}{2}t}}{2} & \frac{-e^{\frac{1}{2}t}+e^{\frac{5}{2}t}}{4} \\ -e^{\frac{1}{2}t}+e^{\frac{5}{2}t} & \frac{e^{\frac{5}{2}t}+e^{\frac{1}{2}t}}{2} \end{bmatrix}$$

e) *Sprungförmige Anregung:*

$$\lim_{t\to+0} y(t) = \frac{1}{36}$$
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -15$$

Rampenförmige Anregung:

$$\lim_{t\to+0} y(t) = 0$$

Der Grenzwert von $\lim\limits_{s\to+0} G(s)\frac{1}{s^2}$ *existiert nicht. Daher ist keine Aussage möglich.*

2. Lösen Sie folgende, voneinander unabhängige Aufgaben: **9 P.|**

a) Gegeben ist der in Abbildung 1 dargestellte Regelkreis. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $T_{dy}(s)$ vom Störeingang d zum Ausgang y für **2 P.|**

$$G_1 = 1 \qquad G_2 = \frac{s+3}{s} \qquad G_3 = \frac{s+4}{s+1} \qquad G_4 = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \ . \tag{3}$$

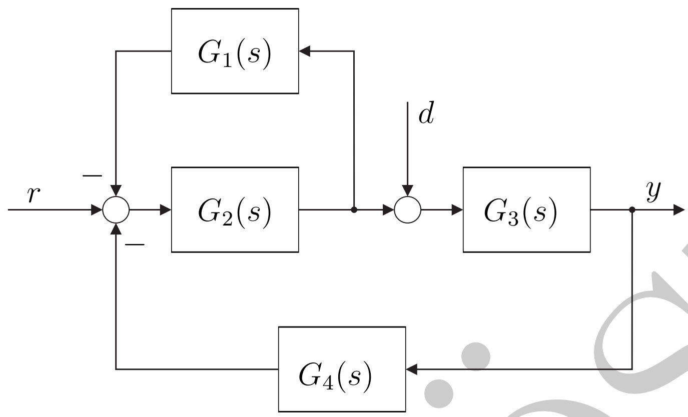

Abbildung 1: Blockschaltbild zur Aufgabe 2a).

b) Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ besitzt das in Abbildung 2 dargestellte Bodediagramm.

i. Bestimmen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf den Systemeingang **2 P.|**

$$u(t) = 10\cos\left(100t + \frac{25}{180}\pi\right) + \sin\left(500t + \frac{10}{180}\pi\right) \tag{4}$$

im eingeschwungenen Zustand. **Hinweis:** $20\log_{10}(2) \approx 6$

ii. Wie muss $u(t)$ aussehen, damit $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand die Form **1 P.|**

$$y(t) = 0.3\sin(10t) \tag{5}$$

hat.

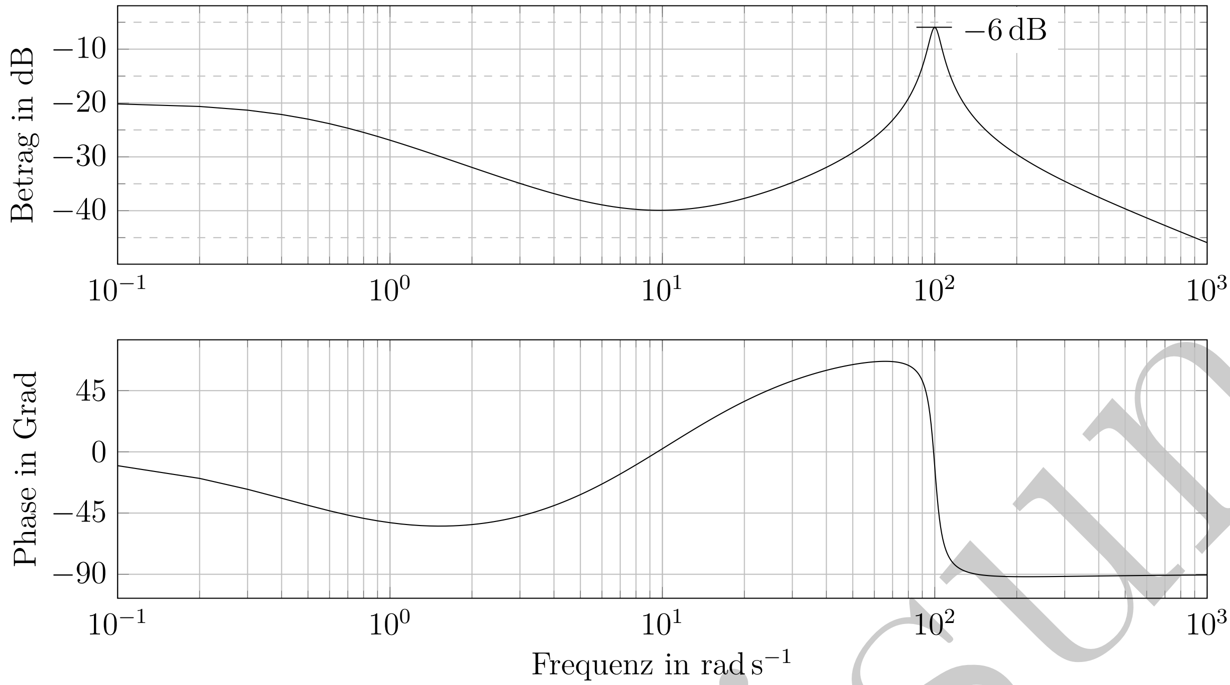

Abbildung 2: Bodediagramm zur Aufgabe 2b).

c) Bestimmen Sie zum Pol-Nullstellendiagramm aus Abbildung 3 die zugehörige Übertragungsfunkton. Alle Polstellen × und Nullstellen ○ sind einfach. Ist die Übertragungsfunktion eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort. **2 P.**|

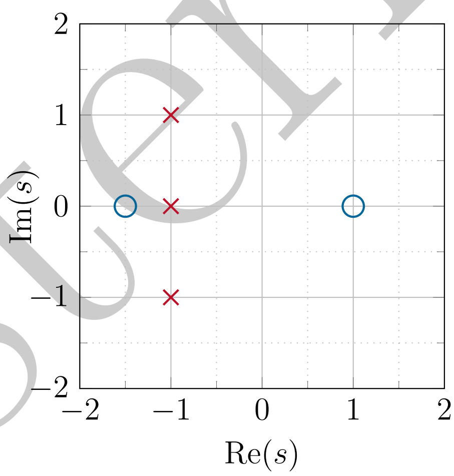

Abbildung 3: Pol-Nullstellendiagramm zur Aufgabe 2c).

d) Skizzieren Sie die Sprungantwort von **2 P.**|

$$G(s) = \frac{10}{s^2+1}\,. \tag{6}$$

Lösung:

a) Die Schleife, welche durch G_1 und G_2 gebildet wird lässt sich durch $G_{12} = \frac{G_2}{1+G_1G_2}$ darstellen. Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion $T_{dy} = \frac{G_3}{1+G_3G_4G_{12}} = \frac{2s^4+17s^3+49s^2+58s+24}{2s^4+11s^3+23s^2+26s+18}$.

b) Das Signal $u(t)$ ist eine Linearkombination von harmonischen Funktionen und da das System linear ist, ist der Ausgang eine Linearkombination von harmonischen Funktionen gleicher Frequenz. Die Verstärkungen mit welchen die einzelnen harmonischen Signale verstärkt werden als auch die Phasenverschiebung kann im Bodediagramm direkt bei
$\omega = 10 : |G| = -40\,\text{dB} \triangleq 0.01, \text{angle}(G) = 0°$
$\omega = 100 : |G| = -6\,\text{dB} \triangleq 0.5, \text{angle}(G) = 0°$
$\omega = 500 : |G| = -40\,\text{dB} \triangleq 0.01, \text{angle}(G) = -90° \triangleq -0.5\pi\text{rad}$
abgelesen werden.

   i. Damit ergibt sich im eingeschwungenen Zustand $y(t) = 5\cos\left(100t + \frac{25}{180}\pi\right) + 0.01\sin\left(500t - \frac{80}{180}\pi\right)$

   ii. Für den gegebenen Ausgang muss $u(t) = 30\sin(10t)$ gelten.

c) Die Nullstellen und Polstellen können aus Abbildung 3 abgelesen werden wodurch sich die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{(s+1.5)(s-1)}{(s+1)(s-(-1-I))(s-(-1+I))} = \frac{2s^2+s-3}{2s^3+6s^2+8s+2}$ ergibt. Die Übertragungsfunktion ist nicht eindeutig, da jede Übertragungsfunktion $G_2(s) = VG(s)$ mit einer beliebigen Verstärkung V das selbe Pol-Nullstellendiagramm besitzt.

d) Die Sprungantwort lautet im Laplacebereich $\frac{1}{s}G(s)$. Ein Ansatz für die Partialbruchzerlegung $\frac{10}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2+1} + \frac{sC}{s^2+1}$ ergibt durch Umformen $10 = s^2(A+C) + sB + A$ wodurch sich durch Koeffizientenvergleich $A = 10, B = 0$ und $A + C = 0$ ergibt und dadurch die Sprungantwort zu $\frac{1}{s}G(s) = \frac{10}{s} - \frac{10s}{s^2+1}$. Durch Nachschlagen in der Laplace-Tabelle erhält man die Sprungantwort im Zeitbereich $10\sigma(t) - 10\sigma(t)\cos(t)$ welche in Abbildung 4 dargestellt ist.

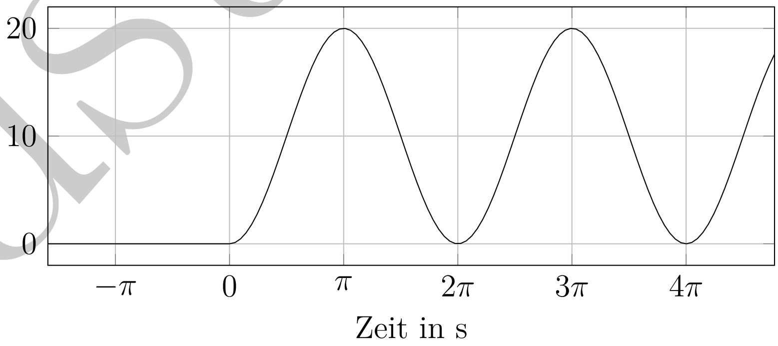

Abbildung 4: Sprungantwort zu Aufgabe 2d).

3. Bearbeiten Sie folgende Punkte. Diese sind unabhängig voneinander lösbar. **12 P.|**

a) Von einem System ist die zeitkontinuierliche Übetragungsfunktion **2 P.|**

$$G(s) = \frac{4s + 11}{s^2 + 5s + 6} \tag{7}$$

gegeben. Berechnen Sie die zugehörige q-Übetragungsfunktion. Verwenden Sie dabei die allgemeine Abtastzeit T_a.

b) Entwerfen Sie für die Übetragungsfunktion (Abtastzeit T_a) **3 P.|**

$$G^{\#}(q) = 10\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}q}{(1+q)(1+\sqrt{3}q)}$$

einen PI-Regler. Die Anstiegszeit soll $t_R = 1.2\,\mathrm{s}$ und das Überschwingen ü $=$ $25\,\%$ betragen.

c) Stellen Sie einen allgemeinen PI-Regler $R^{\#}(q)$ in der Form **2 P.|**

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n}$$

sowie in der ersten Standardform (Steuerbarkeitsnormalform) dar.

d) Vervollständigen Sie den in Abbildung 6 angegebenen digitalen Regelkreis. Zeichnen Sie dazu die notwendigen A/D- und D/A-Wandler, die Strecke, die Aktoren sowie notwendige Sensoren ein und markieren Sie die Stellgröße, die Führungsgröße und die Regelgröße. **2 P.|**

e) Abbildung 6 zeigt unter anderem die Übertragungsstrecke von (u_k) nach $u(t)$ eines D/A-Wandlers. Dabei werden die im Digitalrechner berechneten Werte u_k, $k = 0, 1, \dots, \infty$ $(u_k = 0,\ k < 0)$, zu jedem Abtastschritt an den D/A-Wandler weitergegeben. Abbildung 5 zeigt den Verlauf des am Eingang des D/A-Wandlers anliegenden Signals (u_k) sowie dessen Ausgangsgröße $u(t)$. Geben Sie die Signale (u_k) und $u(t)$ im Laplacebereich an und ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Halteglieds nullter Ordnung. **3 P.|**

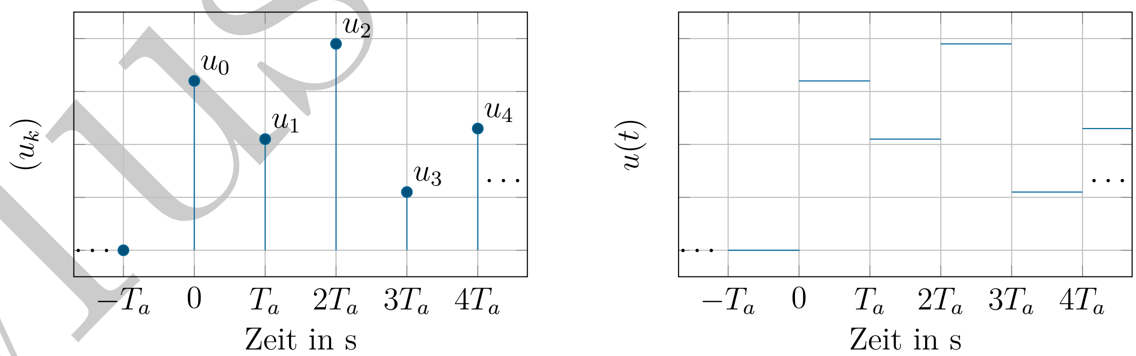

Abbildung 5: Verlauf des Eingangs- und Ausgangssignales des Haltegliedes nullter Ordnung.

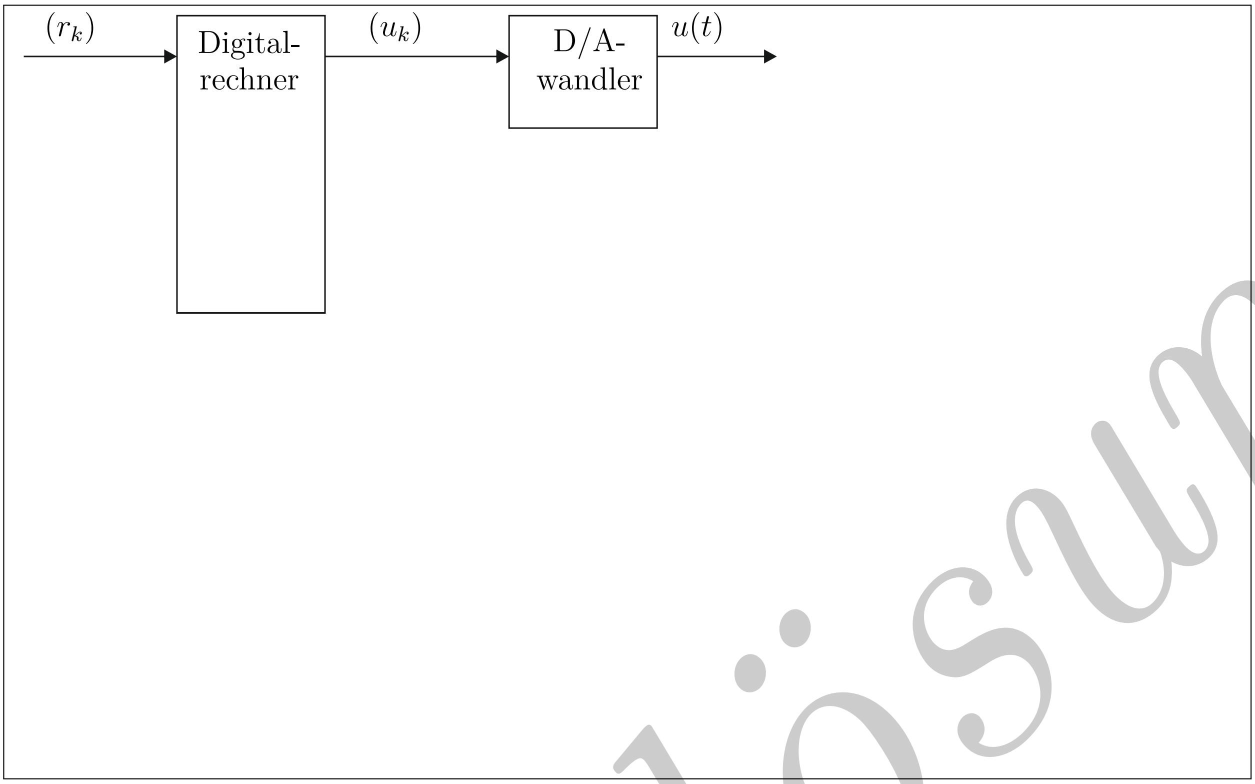

Abbildung 6: Digitaler Regelkreis.

Lösung:

a)

$$G(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3} \rightarrow G^{\#}(q) = \frac{3}{2}\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{(1 + q\frac{T_a}{2}\frac{1}{\tanh(T_a)})} + \frac{1}{3}\frac{1 - \frac{T_a}{2}q}{(1 + q\frac{T_a}{2}\frac{1}{\tanh\left(\frac{3}{2}T_a\right)})}$$

b)

$$t_R\omega_c = 1.2 \rightarrow \omega_c = 1, \quad \Phi + \text{ü} = 70 \rightarrow \Phi = 45° = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
\arg\left(G^{\#}(q)\frac{1+qT_I}{q}\right)\bigg|_{q=I} &= \arg\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}I\right) - \arg(1+I) - \arg\left(1+\sqrt{3}I\right) \\
&\quad - \arg(I) + \arg(1 + IT_I) \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}(T_I) \overset{!}{=} -\frac{3}{4}\pi \\
&\rightarrow T_I = \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\left|G^{\#}(q)R^{\#}(q)\right|\bigg|_{q=I} &= V_I\frac{10\cdot\frac{4}{3}}{\sqrt{2}\cdot 2} \overset{!}{=} 1 \\
&\rightarrow V_I = \frac{3}{20}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

c)

$$R(z) = R^{\#}(q)\Big|_{q=\frac{2}{T_a}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{V_I(1+T_Iq)}{q}\Big|_{q=\frac{2}{T_a}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{V_I(T_a-2T_I)}{2} + z\frac{V_I(T_a+2T_I)}{2}}{-1+z}$$

$$x_{k+1} = x_k + u_k$$
$$y_k = (V_I T_a) x_k + V_I \frac{T_a + 2T_I}{2} u_k$$

d) Siehe Abbildung 7.

e)

$$(u_k)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta(t - kT_a) \rightarrow (u_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-skT_a}$$
$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \sigma(t - kT_a) - u_k \sigma(t - (k+1)T_a) \rightarrow u(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_a}) \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-skT_a}$$
$$\rightarrow G(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_a})$$

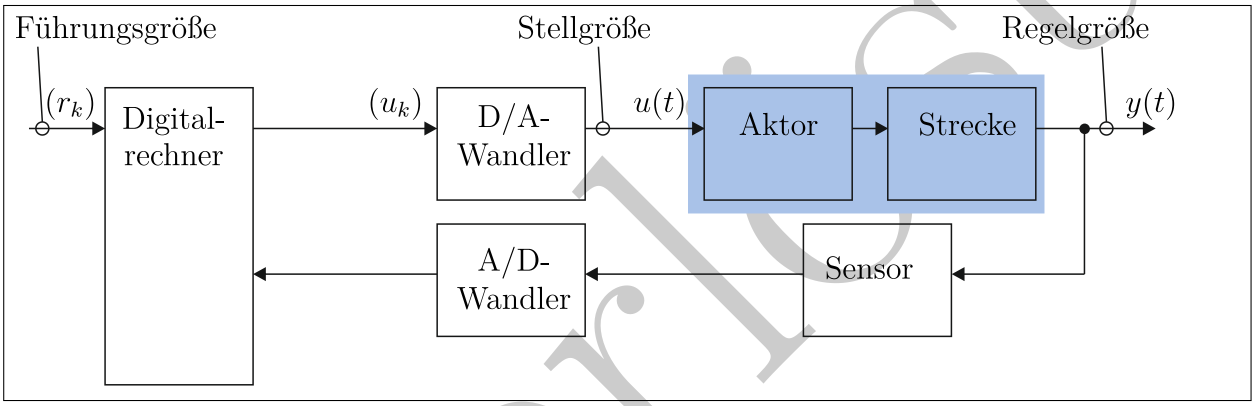

Abbildung 7: Digitaler Regelkreis.

4. Gegeben ist ein zeitdiskretes LTI-System der Form **10 P.**|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \tag{8a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k \tag{8b}$$

mit $\mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} & x_{3,k} & x_{4,k} \end{bmatrix}$ und

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

a) Bestimmen Sie die Ausgänge y_0, y_1, y_2, y_3 für einen allgemeinen Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und $u_k = 0$. **1.5 P.**|

b) Das System (8) besitzt ein nicht beobachtbares Teilsystem. Welches Teilsystem ist das? Zerlegen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$ in beobachtbare Zustände $\mathbf{x}_k^{\mathrm{b}}$ und nicht beobachtbare Zustände $\mathbf{x}_k^{\mathrm{nb}}$. **2 P.**|

c) Zerlegen Sie das System (8) in das nicht beobachtbare Teilsystem der Form **2 P.**|

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{nb}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{nb}}\mathbf{x}_k^{\mathrm{nb}} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nb}}u_k + \mathbf{H}\mathbf{x}_k^{\mathrm{b}} \tag{10}$$

und das beobachtbare Teilsystem der Form

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{b}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{b}}\mathbf{x}_k^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{b}}u_k \tag{11}$$

$$y_k = \left(\mathbf{c}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k^{\mathrm{b}}. \tag{12}$$

Bestimmen Sie hierbei $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{nb}}, \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nb}}, \mathbf{H}, \mathbf{\Phi}^{\mathrm{b}}, \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{b}}$ und $\left(\mathbf{c}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}$.

d) Entwerfen Sie für das beobachtbare Teilsystem einen vollständigen Luenberger Beobachter so, dass alle Eigenwerte der Fehlerdynamik bei 0 liegen. **3 P.**|

e) Ist es möglich, für das nicht beobachtbare Teilsystem einen trivialen Beobachter zu entwerfen? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn dies möglich ist, geben Sie den trivialen Beobachter an. **1.5 P.**|

Lösung:

a) *Die Ausgänge lassen sich durch* $y_k = c^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$ *bestimmen. Und die erforderlichen Zustände am angenehmsten duch* $\mathbf{x}_1 = \mathbf{\Phi x_0}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{\Phi x_1}, \mathbf{x}_3 = \mathbf{\Phi x_2}$ *bestimmen. Der Ausgang zu den Zeitpunkten* $k \in 0 \ldots 3$ *ergibt sich zu:*
$y_0 = \xi_3$, $y_1 = 2\xi_3 + \xi_4$, $y_2 = 4\xi_3 + 4\xi_4$, $y_3 = 8\xi_3 + 12\xi_4$

b) *Zustände welche sich nie auf den Ausgang auswirken nennt man nicht beobachtbar. Da es sich bei (8) um ein zeitdiskretes LTI-System vierter Ordnung handelt können in* $y_k, \forall k > 3$ *keien Zustände auftreten, welche nicht auch in* $y_0, \ldots, y_3$ *auftreten. Damit ergibt sich* $\mathbf{x}^{nb} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *und* $\mathbf{x}^{b} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

c) *Setzt man die aufgeteilten Zustände in 8 ein, so ergibt sich*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{nb}}_{k+1} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{b}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{nb}}_{k} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{b}}_{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{nb}}_{k+1} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{b}}_{k+1} \end{bmatrix} .$$

Duch ausmultiplizieren ergibt sich die Form

$$\mathbf{x}^{\mathrm{nb}}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}^{\mathrm{nb}}} \mathbf{x}^{\mathrm{nb}}_{k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nb}}} u_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \mathbf{x}^{\mathrm{b}}_{k} \tag{13}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{b}}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}^{\mathrm{b}}} \mathbf{x}^{\mathrm{b}}_{k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{b}}} u_k \tag{14}$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{(\mathbf{c}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}} \mathbf{x}^{\mathrm{b}}_{k} \tag{15}$$

in welcher die gesuchten Matrizen abgelesen werden können.

d) *Der Luenberger Beobachter hat die Form*

$$\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{b}}_{k+1} = \left(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{b}} + \hat{\mathbf{k}}\left(\mathbf{c}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}\right)\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{b}}_{k} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{b}} u_k - \hat{\mathbf{k}} y_k .$$

Die Eigenwerte der Fehlerdynamik sind durch $\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\left(\mathbf{c}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}$ *definiert wobei* $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ *ist. Das charakteristische Polynom is durch* $p = \det\left(\lambda\mathbf{E} - \left(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\left(\mathbf{c}^{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right)$ *gegeben und lautet* $p = \lambda^2 + (-k_1 - 4)\lambda + 2k_1 - k_2 + 4$. *Um die Forderung (alle Eigenwerte bei 0) zu erfüllen, muss* $p = \lambda^2$ *gelten. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich* $k_1 = k_2 = -4$.

e) *Ja. Da das nicht beobachtbare Teilsystem stabil ist ist auch die Fehlerdynamik des trivialen Beobachters (Simulators) stabil. Da* $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{nb}}$ *eine Dreiecksmatrix ist kann man die Eigenwerte* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *an der Diagonale ablesen.*