

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 05.06.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die folgenden Aufgaben können getrennt voneinander bearbeitet werden:

10 P. |

a) Gegeben ist das Pol-Nullstellen Diagramm einer Übertragungsfunktion $G(s)$.

5 P. |

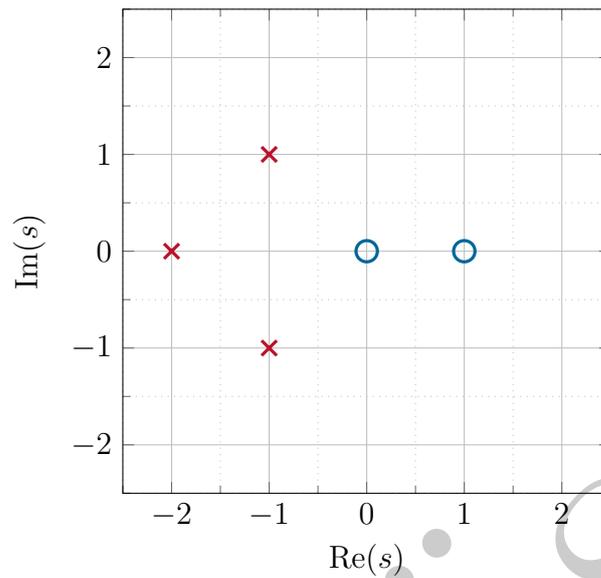


Abbildung 1: Pol-Nullstellen Diagramm (Nullstellen \circ , Polstellen \times).

i. Geben Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ in normierter Form, also mit dem Verstärkungsfaktor $V = 1$, an.

2 P. |

ii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des zugehörigen Abtastsystems für eine Abtastzeit $T_a = \frac{\pi}{2}$.

3 P. |

b) Gegeben ist die Impulsantwort eines Systems der Ordnung $n = 3$

5 P. |

$$g_k = (0, 1, a, b, 0, 0, \dots), \quad a > 0, b > 0.$$

i. Ist das zugehörige System BIBO stabil? Ist das System sprungfähig?

1 P. |

ii. Ist das zugehörige System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar?

1 P. |

iii. Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die gegebene Ausgangsfolge y_k aus der gegebenen Eingangsfolge u_k resultiert.

3 P. |

$$u_k = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right), \quad y_k = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{5\pi}{4}\right)$$

Hinweis: $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

Lösung:

a) i. $G(s) = \frac{s(1-s)}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{2}+s+1\right)}$, $G(s) = \frac{sz(s)}{n(s)}$ mit $z(0) = n(0) = 1$

ii. $G(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{6z}{z-e^{-\pi}} - \frac{6z^2}{z^2+e^{-\pi}} + 2 \frac{ze^{-\pi/2}}{z^2+e^{-\pi}} \right)$

b) i. *BIBO-stabil* $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$, *nicht sprungfähig* $g_0 = 0$

ii. $\det(\mathbf{H}[1, 2]) = -b^3$

iii. $y_k = |G(z)|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + \arg(G(z))_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}}\right)$
 $\Rightarrow a = 1, b = 2$

2. Die folgenden Aufgaben können getrennt voneinander gelöst werden: **10 P.**

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **6 P.**

$$G(s) = \frac{10\sqrt{3}}{(s+1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s+1\right)}$$

i. Ist $G(s)$ phasenminimal? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 P.**

ii. Entwerfen Sie für das obige System einen geeigneten Regler mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens so, dass der geschlossene Kreis die folgenden Eigenschaften erfüllt: **3 P.**

- Anstiegszeit: $t_r = 1.5 \text{ s}$
- Überschwingen: $\ddot{u} = 10\%$
- bleibende Regelabweichung auf einen Führungssprung: $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$.

iii. Nehmen Sie nun an, dass die Ausgangsgröße $y(t)$ nur mit der Totzeit $T_D > 0$ verzögert erfasst werden kann. Wie groß darf diese Totzeit T_D maximal sein, so dass der geschlossene Kreis mit dem zuvor entworfenen Regler nicht instabil wird? **2 P.**

b) Gegeben ist das nichtlineare System **2 P.**

$$\dot{x} = e^{-x}.$$

Geben Sie die Lösung $x(t)$ des nichtlinearen Systems für einen allgemeinen Anfangswert $x(0) = x_0$ an.

c) Zeichnen Sie das Blockschaltbild einer Steuerung mit Störgrößenaufschaltung und beschriften Sie sämtliche Blöcke und Signale, insbesondere kennzeichnen Sie die Störung, das Führungssignal, die Stellgröße und die Regelgröße. **2 P.**

Lösung:

a) i. ja, $G(s) = \frac{z(s)}{n(s)}$, $\forall s_i : n(s_i) = 0$ mit $\Re(s_i) < 0$

ii. $R(s) = \frac{V(1+sT)}{s}$, $T = 1, V = 1/15$

iii. $T_D < \frac{\pi}{3}$

b) $x(t) = \ln(t + e^{x_0})$

c) siehe Skriptum Kap. 4.2.2

3. Betrachtet wird ein lineares System der Form

10 P.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}\end{aligned}\tag{1}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [0 \quad 1 \quad 0].$$

- a) Berechnen Sie die Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Ist das System vollständig erreichbar? **1.5 P.**
- b) Für das System (1) soll ein Zustandsregler entworfen werden. Berechnen Sie den Rückführvektor so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = -4$ liegen. **4 P.**
- c) Illustrieren Sie graphisch die Kombination aus beobachterbasiertem Zustandsregler und Zustandsbeobachter in einem Blockdiagramm. Welche Zustände und welche Dimension hat der geschlossene Kreis? Wie sieht die Struktur der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises aus? **3.5 P.**
- d) Das System (1) ist nicht vollständig beobachtbar. Geben Sie das nicht beobachtbare Teilsystem an. **1 P.**

Lösung:

a)

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})) = 3 \rightarrow$ vollständig erreichbar

b) $\mathbf{k}^T = [-9 \ 0 \ 21]$

c) Siehe Abbildung 8.3 im Skriptum Automatisierung.

Zustände: $\mathbf{x}_{ges}^T = [\mathbf{x}^T, \mathbf{e}^T] \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$

Die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises hat Blockdiagonalstruktur.

d)

$$\dot{\mathbf{x}}_{no} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{no} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

4. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P. |

a) Gegeben ist das nichtlineare System

4 P. |

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_2) - x_1^2 \exp(\alpha x_2) \\ 3x_2^2 + \frac{u}{2} \end{bmatrix}, \quad y = \exp\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{u}{8} \quad (2)$$

mit $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und $u, \alpha \in \mathbb{R}$.

i. Bestimmen Sie die Ruhelage/Ruhelagen (für $u_R = 0$) des Systems (2).

1 P. |

ii. Linearisieren Sie das System (2) um einen allgemeinen Arbeitspunkt (\mathbf{x}_R, u_R) und stellen Sie es wie folgt dar:

3 P. |

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + d \Delta u. \end{aligned}$$

b) Gegeben ist ein nichtlineares System

2.5 P. |

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Leiten Sie das um eine Trajektorie $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ linearisierte System für eine vorgegebene Eingangsgröße $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$ und einen vorgegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$ her. Geben Sie dabei alle notwendigen Schritte an.

c) Gegeben sind die folgenden drei Übertragungsfunktionen

1.5 P. |

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}, \quad G_2(s) = \frac{s - 2}{s^3 - 2s^2 + 2s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}.$$

Ordnen Sie die Übertragungsfunktionen $G_j(s), j \in \{1, 2, 3\}$ den folgenden Nyquist-Diagrammen zu. Begründen Sie Ihre Antwort!

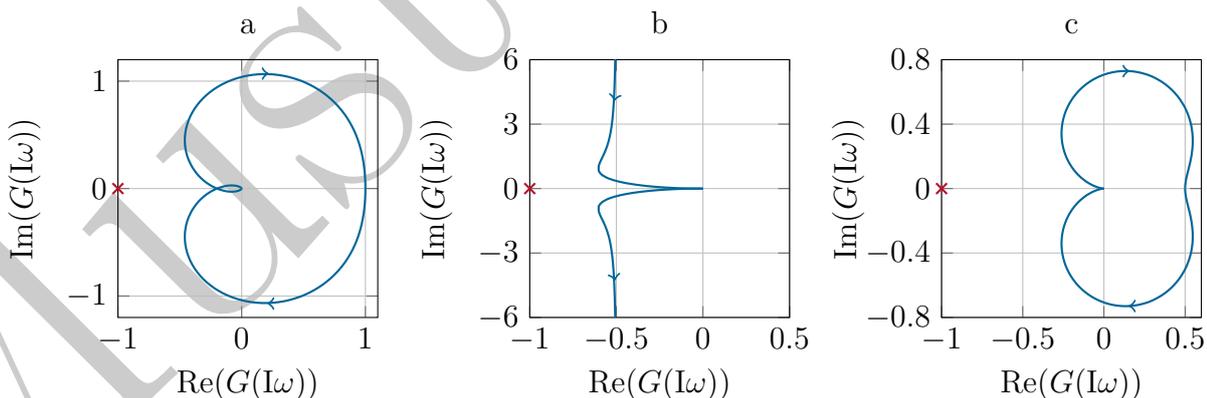


Abbildung 2: Nyquist-Ortskurven der Übertragungsfunktionen aus Aufgabenteil c).

- d) Abbildung 3 zeigt die Ortskurve eines offenen Regelkreises mit der Übertragungsfunktion 1 P.

$$L(s) = \frac{(s - 0.1)(s - 1)}{(s + 0.2)^2(s + 0.5)}.$$

Überprüfen Sie mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums, ob der geschlossene Regelkreis

$$T_{r,y}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

BIBO-stabil ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

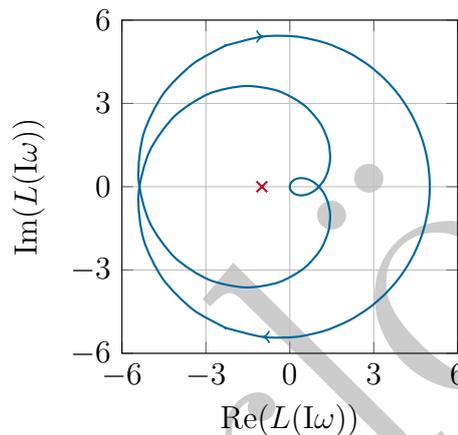


Abbildung 3: Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion $L(s)$ aus Aufgabenteil d).

- e) Abbildung 4 zeigt die Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises $L(s) = R(s)G(s)$. Kann man eine Aussage treffen, ob der zugehörige geschlossene Regelkreis mit einem Freiheitsgrad BIBO-stabil ist? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.

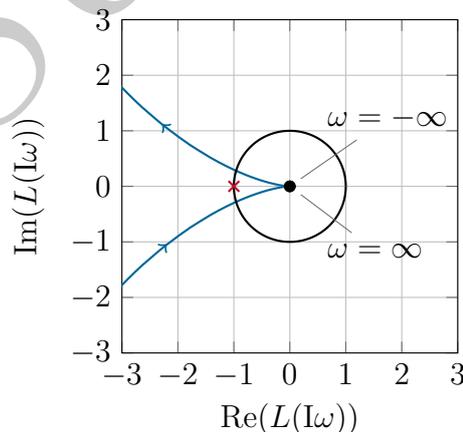


Abbildung 4: Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion $L(s)$ aus Aufgabenteil e).

Lösung:

- a) i. $x_{1,R} = \pm 1, x_{2,R} = 0$
 ii.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2x_{1,R} \exp(\alpha x_{2,R}) & -\sin(x_{2,R}) - \alpha x_{1,R}^2 \exp(\alpha x_{2,R}) \\ 0 & 6x_{2,R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \left[-\frac{x_{2,R}}{x_{1,R}} \exp\left(\frac{x_{2,R}}{x_{1,R}}\right) \quad \frac{1}{x_{1,R}} \exp\left(\frac{x_{2,R}}{x_{1,R}}\right) \right], \quad d = \frac{1}{8}$$

- b)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \Delta \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}_{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{A}(t)} \Delta \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{B}(t)} \Delta \tilde{\mathbf{u}}, \quad \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0$$

$$\tilde{\mathbf{y}} + \Delta \tilde{\mathbf{y}} = \underbrace{\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}_{\tilde{\mathbf{y}}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{C}(t)} \Delta \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{D}(t)} \Delta \tilde{\mathbf{u}}$$

- c) $G_1(s) \rightarrow c, G_2(s) \rightarrow b, G_3(s) \rightarrow a$

d) $-4\pi \neq [3 - 3 + 0]\pi$

- e) *Die Nyquist-Ortskurve kann wie das Bode-Diagramm dazu verwendet werden die Phasenreserve abzulesen. Diese ist im mathematisch positiven Sinne ausgehend von der negativen reellen Achse hin zum Schnittpunkt der Ortskurve mit dem Einheitskreis zu bestimmen. Da die Phasenreserve in jedem Fall positiv ist, gilt gemäß Satz 4.6 Eingangs-Ausgangs-Stabilität für den zugehörigen geschlossenen Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.*