Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 09.07.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:
Hörsaal/Sitzplatznummer:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	11	11	11	7	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

Musterlösung

1. Bearbeiten Sie die voneinander unabhängigen Teilaufgaben: **11 P.|**

a) Ein Prozess mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y wird durch die nichtlineare Differentialgleichung **6 P.|**

$$\ddot{y} + y^2 + y\dot{y} = \sqrt{u}\ ,\ u > 0$$

beschrieben.

i. Transformieren Sie das obige System in Zustandsraumdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$. 1 P.|

ii. Bestimmen Sie sämtliche Ruhelagen für eine konstante Eingangsgröße $u = u_R > 0$. Schreiben Sie das Ergebnis in der Form $(\mathbf{x}_R, y_R, u_R)$ an. 1.5 P.|

iii. Linearisieren Sie das gegebene System um die Ruhelagen für $u = u_R = 16$ und stellen Sie die linearisierten Systeme in der Form 2 P.|

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u,$$
$$\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u$$

mit $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ und $\Delta y = y - y_R$ dar.

iv. Sind die Ruhelagen aus 1(a)iii. asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 1.5 P.|

b) Gegeben ist das System **5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{1a}$$
$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{1b}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1c}$$
$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1d}$$

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

i. Darf man für das System (1) einen trivialen Beobachter entwerfen? Begründen Sie Ihre Antwort! Wenn ja, wie sieht dieser aus und wie lautet die Beobachterfehlerdynamik? Wie sieht der zeitliche Verlauf des Beobachtungsfehlers aus für den Anfangsfehler $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(t = 0) = [2 \quad 0 \quad 0]$? 2.5 P.|

ii. Wie sieht für das System (1) ein vollständiger Luenberger-Beobachter aus? Können Sie die Eigenwerte für die Beobachterfehlerdynamik beliebig platzieren? Begründen Sie Ihre Antwort!
Geben Sie Eigenwerte so an, dass ein Anfangsfehler $\mathbf{e}(t = 0)$ schneller abklingt als $K\exp(-10t)$. 2.5 P.|

Musterlösung

Lösung:

a) i.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sqrt{u} - x_1^2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

ii.

$$(x_{1,R}, x_{2,R}, y_R, u_R) = (\pm\sqrt[4]{u_R}, 0, \pm\sqrt[4]{u_R}, u_R)$$

iii. Ruhelage 1 ($x_{1,R} = 2,\ x_{2,R} = 0$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix},\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ d = 0$$

Ruhelage 2 ($x_{1,R} = -2,\ x_{2,R} = 0$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix},\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ d = 0$$

iv. Ruhelage 1 ($x_{1,R} = 2,\ x_{2,R} = 0$):
$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 + 2\lambda + 4$ ist ein Hurwitzpolynom $\implies$ Ruhelage 1 ist asymptotisch stabil.

Ruhelage 2 ($x_{1,R} = -2,\ x_{2,R} = 0$):
$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 - 2\lambda - 4$ ist kein Hurwitzpolynom $\implies$ Ruhelage 2 ist nicht asymptotisch stabil.

b) i. Da $\mathbf{A}$ in Jordanscher Normalform vorliegt, können die Eigenwerte direkt abgelesen werden: $\lambda_1 = -4,\ \lambda_{2,3} = -2 \pm I$.
Da $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$, ist das System (1) stabil. Folglich darf ein trivialer Beobachter entworfen werden.

Trivialer Beobachter:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u, \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Beobachterfehlerdynamik: $\quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$

Zeitlicher Verlauf des Beobachtungsfehlers:

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} 2 \cdot \exp(-4t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii. Vollständiger Luenberger-Beobachter:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y} - y), \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte für die Beobachterfehlerdynamik können beliebig platziert werden, da das System (1) vollständig beobachtbar ist. Die vollständige Beobachtbarkeit kann man mithilfe der Beobachtbarkeitsmatrix zeigen.

Musterlösung

Eine alternative Begründung für die vollständige Beobachtbarkeit ist die Tatsache, dass die Zustände x_1 und x_2 direkt und der Zustand x_3 indirekt über x_2 auf den Ausgang wirken.

Punkte konstanter Zeitkonstante liegen im Pol-Nullstellen Diagramm auf Halbkreisen. Die Eigenwerte für die Beobachterfehlerdynamik müssen folglich im Pol-Nullstellen Diagramm links vom Kreis mit Radius 10 (und Mittelpunkt im Ursprung) liegen. Ein Beispiel hierfür sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -11,\ \lambda_{2,3} = -15 \pm I2$.

Musterlösung

2. Die folgenden Aufgaben können getrennt voneinander gelöst werden: **11 P.|**

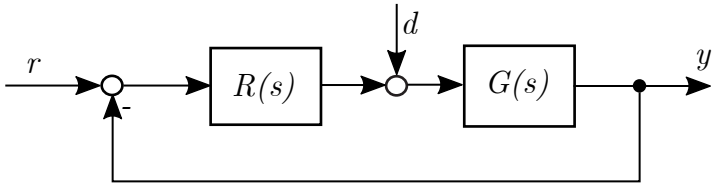

Abbildung 1: Strukturschaltbild des Regelkreises.

a) Gegeben ist der Regelkreis aus Abb. 1 mit der Übertragungsfunktion **4 P.|**

$$G(s) = \frac{2 \cdot 10^3 (s + 100)}{(s - 10)(s + 1000)}.$$

i. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm des offenen Kreises $L(s)$ für $R(s) = \frac{1}{2}$ in die beiliegende Vorlage ein. 2 P.|

ii. Zeichnen Sie die Durchtrittsfrequenz ω_C und die Phasenreserve Φ in das Bode-Diagramm ein. Kann man im vorliegenden Fall mithilfe der Phasenreserve Φ eine Aussage über die BIBO-Stabilität des geschlossenen Kreises nach Abb. 1 treffen? Wenn ja, ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antworten! 2 P.|

b) Gegeben ist der in Abb. 1 dargestellte Regelkreis mit der Übertragungsfunktion **4.5 P.|**

$$G(s) = \frac{s + 3}{(s^2 + s - 2)(s + 5)}.$$

i. Charakterisieren Sie das System $G(s)$ auf Phasenminimalität und Sprungfähigkeit. Begründen Sie Ihre Antworten! 1 P.|

ii. Weiters sind die Regler mit den Übertragungsfunktionen 3.5 P.|

$$R_1(s) = \frac{V_R(s - 1)}{s^2}, \quad R_2(s) = \frac{V_R(s + 2)}{s}, \quad R_3(s) = \frac{V_R(s + 1)}{5}$$

gegeben.
Welche realisierbaren Regler führen zu einem intern stabilen Regelkreis? Begründen Sie für jede der drei Reglerübertragungsfunktionen Ihre Antwort!
In welchem Wertebereich muss hierzu V_R liegen?

c) Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Lag-Gliedes an. Skizzieren Sie die Sprungantwort des Lag-Gliedes und beschriften Sie insbesondere den Wert zum Zeitpunkt $t \to +0$ und $t \to \infty$. **2.5 P.|**
Wann verwendet man beim Frequenzkennlinienverfahren ein Lag-Glied?

Musterlösung

Lösung:

a) i.

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10^3(s+100)}{(s-10)(s+1000)} = -10 \cdot \frac{(1+\frac{s}{100})}{(1-\frac{s}{10})(1+\frac{s}{1000})}$$

Bode-Diagramm: siehe Abb.2.

ii. Durchtrittsfrequenz ω_C und die Phasenreserve Φ: siehe Abb.2.
Im vorliegenden Fall kann man mithilfe der Phasenreserve Φ keine Aussage über die BIBO-Stabilität treffen, da der Verstärkungsfaktor V negativ und das Nennerpolynom $n_L(s)$ kein Hurwitzpolynom ist (siehe Bedingungen für 'Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung' laut Formelsammlung).

b)

$$G(s) = \frac{s+3}{(s^2+s-2)(s+5)} = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)(s+5)}.$$

i. Das System $G(s)$ ist nicht phasenminimal, da ein Pol in der rechten s-Halbebene liegt.
Das System $G(s)$ ist nicht sprungfähig, da $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ gilt.

ii. Der Regler $R_1(s)$ führt zu einer nicht erlaubten Pol/Nullstellenkürzung des Pols in der rechten s-Halbebene.

Der Regler $R_3(s)$ ist nicht realisierbar, da $\text{grad}(z_R(s)) > \text{grad}(n_R(s))$

Für die interne Stabilität muss $1 + R_2(s)G(s) = \frac{s(s-1)(s+5)+V_R(s+3)}{s(s-1)(s+5)} \neq 0$ für $Re(s) \geq 0$ erfüllt sein. Somit muss V_R so gewählt werden, sodass das Zählerpolynom ein Hurwitzpolynom ist.
$R_2(s)$ mit $V_R > 20$ führt zu einem intern stabilen Regelkreis.

c)

$$R(s) = \frac{1+sT}{1+s\eta T},\ \eta > 1.$$

$$h(t \to +0) = \lim_{s\to\infty} R(s) = \frac{1}{\eta}, \quad h(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} R(s) = 1.$$

Die Sprungantwort $h(t)$ startet somit für $t = +0$ beim Wert $\frac{1}{\eta}$ und nähert sich für $t \to \infty$ exponentiell dem Wert 1 an.

Beim Frequenzkennlinien-Verfahren wird ein Lag-Glied verwendet, um eine bestimmte Betrags- und Phasenabsenkung an der Stelle ω_C zu erreichen.

Musterlösung

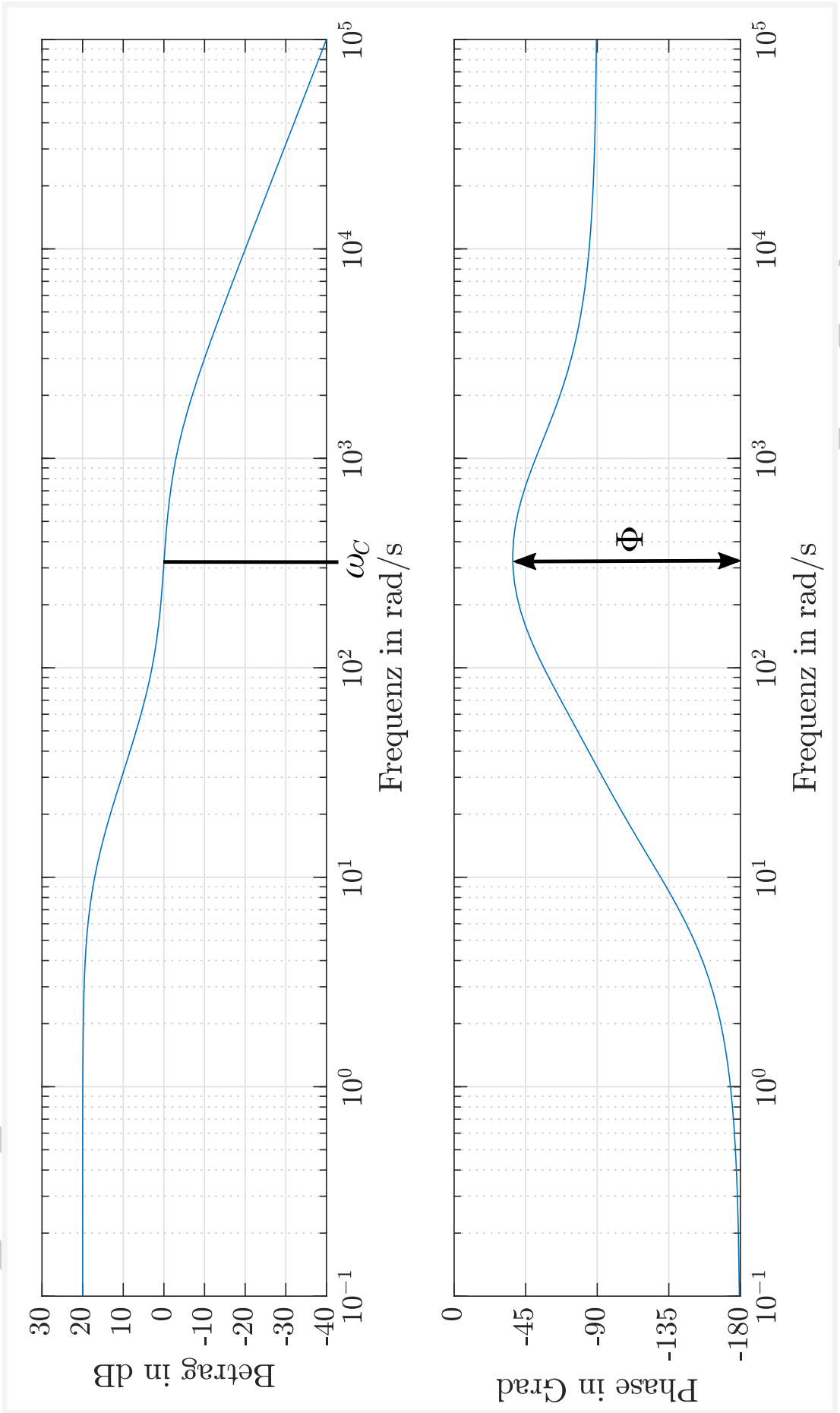

Abbildung 2: Bode-Diagramm des offenen Kreises $L(s)$ zu Aufgabe 2(a)i.

11 P.|

3. Gegeben ist das System von Zustandsdifferentialgleichungen einer elektrischen Schaltung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C = \frac{1}{CR_2}(2u_1 - u_C - u_2 - 2R_1 i_L) \tag{2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L = \frac{1}{L}(u_1 - R_1 i_L) \tag{2b}$$

mit den Anfangszuständen $u_C(0) = u_{C,0}$ und $i_L(0) = i_{L,0}$, den Eingängen u_1 und u_2, sowie dem Ausgang u_C.

a) Überführen Sie das System (2) in Zustandsraumdarstellung **1.5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$$

und geben Sie die Größen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ an.

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ für das System (2) mithilfe der Laplace-Transformation. Verwenden Sie dazu die Parameterwerte $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $C = 1$ und $L = 1$. **3 P.|**

c) Berechnen Sie die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ vom Eingang $\mathbf{u}$ zum Ausgang y. **1 P.|**

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der beiden Zustandsgrößen für einen gegebenen Eingang $u_1 = 5\sigma(t)$, $u_2 = 0$ und die Anfangszustände $u_{C,0} = i_{L,0} = 0$. **3.5 P.|**

e) Geben Sie eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die den Eigenwert 1 mit der algebraischen Vielfachheit 3 und der geometrischen Vielfachheit 2 besitzt. **2 P.|**

Musterlösung

Lösung:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & -\frac{2R_1}{R_2 C} \\ 0 & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R_2 C} & -\frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

b)

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & -2t\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \tag{4}$$

c)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+1)-2}{(s+1)^2} & \dfrac{-1}{(s+1)} \end{bmatrix} \tag{5}$$

d)

$$x_1(t) = 10t\mathrm{e}^{-t} \tag{6}$$

$$x_2(t) = 5(1-\mathrm{e}^{-t}) \tag{7}$$

e)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Musterlösung

4. Die folgenden Aufgaben können getrennt voneinander bearbeitet werden. **7 P.|**

a) Entwerfen Sie einen Dead-Beat Regler für das zeitdiskrete System **3 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k \ . \tag{9}$$

b) Gegeben ist das zeitdiskrete System **4 P.|**

$$y_{k+1} + a y_k = a u_k. \tag{10}$$

i. Berechnen Sie die Ausgangsfolge für $(u_k) = (0)$ und $y_0 \neq 0$ im Folgenbereich. Geben Sie die ersten 3 Folgenglieder an. 1 P.|

ii. Wann ist das System (10) asymptotisch stabil? 1 P.|

iii. Berechnen Sie für $y_0 = 0$ und $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ die Ausgangsfolge im eingeschwungenen Zustand für 2 P.|

$$(u_k) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) + 14 \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{11}$$

Musterlösung

Lösung:

a) $k_0 = 1/2$, $k_1 = -1$, $k_2 = -3/2$

b) i. $y_1 = -ay_0$
$y_2 = a^2 y_0$
$y_3 = -a^3 y_0$

ii. $|a| < 1$

iii. $(y_k) = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{\pi}{4}k - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Musterlösung