

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 28.08.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	11	9	12	8	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden: **11 P.**

a) Gegeben ist das System in Zustandsraumdarstellung **4 P.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \quad (1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1b)$$

mit dem p -dimensionalen Eingang $\mathbf{u}$ und dem m -dimensionalen Ausgang $\mathbf{y}$.

i. Leiten Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ *schrittweise* her. Bitte beachten Sie, dass die Formel des Endergebnisses *hergeleitet* werden muss. **2.5 P.**

ii. Wie groß ist die Dimension der Übertragungsmatrix? **0.5 P.**

iii. Geben Sie eine Interpretation des Eintrages $G_{12}(s)$ an und skizzieren Sie einen experimentellen Versuch, wie Sie $G_{12}(s)$ messen könnten. **1 P.**

b) Gegeben ist die Sprungantwort des kontinuierlichen Systems in Abbildung 1 und die Übertragungsfunktion **3 P.**

$$G(s) = \frac{a}{1 + \frac{s}{b}} + cG_1(s)e^{ds}.$$

i. Bestimmen Sie die ganzzahligen Parameter a , b , c und d und bestimmen Sie das regelungstechnische Übertragungsglied $G_1(s)$ so, dass die Sprungantwort zum System passt. **1.5 P.**

ii. Prüfen Sie ob das System **1.5 P.**
I) BIBO stabil,
II) kausal,
III) zeitvariant
ist und begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gegeben ist eine kaskadierte Regelung für ein Positioniersystem wie in Abbildung 2 dargestellt. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich eine Störung d auf den Ausgang y auswirkt. **4 P.**

i. Bestimmen Sie allgemein die Übertragungsfunktion $T_{dy}(s)$ von d nach y . **1.5 P.**

ii. Welches Signal ist im eingeschwungenen Fall am Ausgang y messbar, wenn $d = 0.1 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)$ als Störung wirkt? Benutzen Sie dafür die Systembeschreibungen $R_x(s) = 1$, $R_v(s) = 1$, $G_v(s) = \frac{4}{s}$, $G_x(s) = \frac{1}{s}$ **2.5 P.**

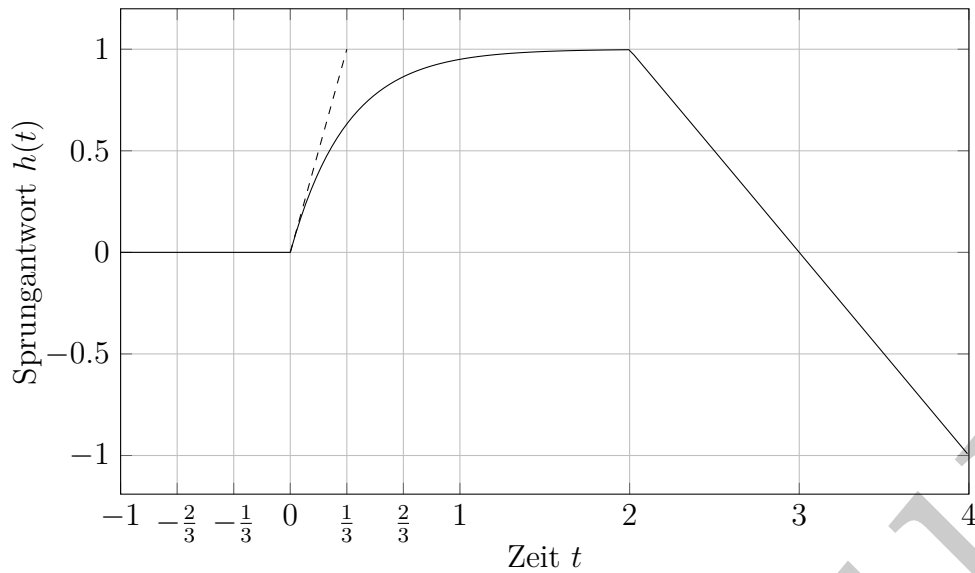


Abbildung 1: Sprungantwort für Aufgabe 1b

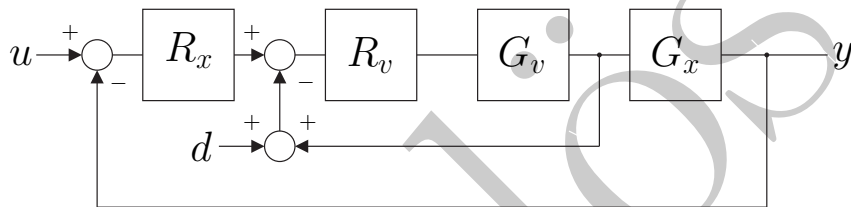


Abbildung 2: Blockschaltbild für Aufgabe 1c

Lösung:

a) i.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{E}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

ii.

$$\dim\{\mathbf{G}(s)\} = \mathbb{R}^{m \times p}$$

iii. $G_{12}(s)$ beschreibt den Eintrag der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ aus der ersten Zeile und zweiten Spalte. $G_{12}(s)$ beschreibt das Verhalten von Eingang $u_2(t)$ zum Ausgang $y_1(t)$ für den Fall, dass alle anderen Eingangssignale null sind $u_i(t) = 0, i = \{1 \dots p\} \setminus 2$ und der Anfangszustand des Systems der Nullzustand ist $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Die Skizze eines experimentellen Aufbau ist in Abbildung 3 dargestellt.

b) i. $a = 1, b = 3, c = -1, d = -2, G(s) = \frac{1}{s}$

ii. I) System ist nicht BIBO stabil,

II) System ist kausal,

III) System ist nicht zeitvariant.

c) i.

$$T_{dy}(s) = -\frac{G_v R_v G_x}{1 + G_v R_v + R_v G_v R_x G_x}$$

ii.

$$y(t) = 0.075 \sin\left(\frac{2\pi t}{\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{3}\right)$$

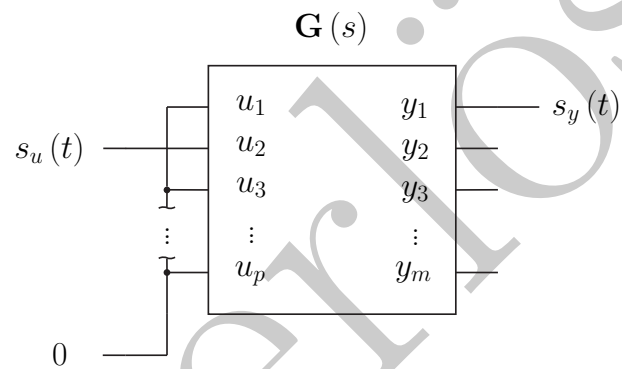


Abbildung 3: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung von $G_{12}(s)$. Ein anregendes Signal $s_u(t)$ wird am Eingang u_2 angelegt. Am Ausgang y_1 wird die Systemantwort $s_y(t)$ gemessen. Aus diesen zwei Signalen kann auf $G_{12}(s)$ geschlossen werden. Alle anderen Eingänge sind während dem Versuch 0.

2. Die folgenden Aufgaben können getrennt voneinander gelöst werden:

9 P.

a) Im Folgenden soll ein Reglerentwurf durchgeführt werden.

4 P.

Bearbeiten Sie dafür folgende Teilaufgaben:

- i. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des phasenminimalen Systems, dessen Bodediagramm in Abbildung 4 dargestellt ist. Nutzen Sie dabei die Knickkennliniennäherung des Betragsganges. 1 P.
- ii. Entwerfen Sie einen PI-Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Vorgaben erfüllt: 3 P.
 - maximales Überschwingen 40 % und
 - Anstiegszeit $t_r = 0.015$ s.

Entwerfen Sie den Regler ungeachtet ihres Ergebnisses des vorigen Unterpunktes auf Basis der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{30}{(s/100 + 1)(s\sqrt{3}/100 + 1)}.$$

b) Gegeben ist das in Abbildung 5 dargestellte Blockdiagramm eines Biquad Filters. **5 P.**

- i. Bestimmen sie die z -Übertragungsfunktion von (u_k) nach (y_k) . Die Größen k_1 , k_2 , k_3 , k_4 und k_5 sind dabei die Verstärkungen von Proportional-Gliedern. 2 P.
- ii. Die Parameter k_1 , k_2 , k_3 , k_4 und k_5 sollen nun so berechnet werden, dass sich der Biquad Filter so verhält, wie die Verschaltung der kontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$ nach Abbildung 6. Als Abtastzeit wird $T_a = \frac{1}{100\omega_g}$ angenommen und die kontinuierliche Übertragungsfunktion lautet $G(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_g} + 1}$. 3 P.

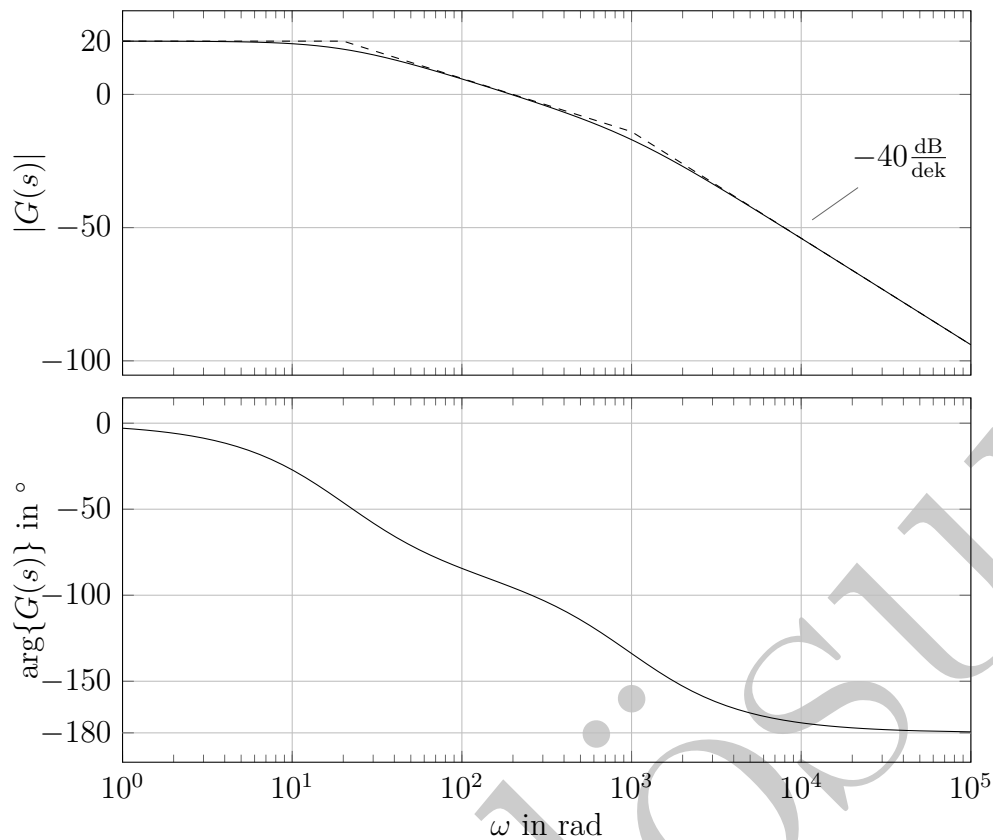


Abbildung 4: Bodediagramm für Aufgabe 2a

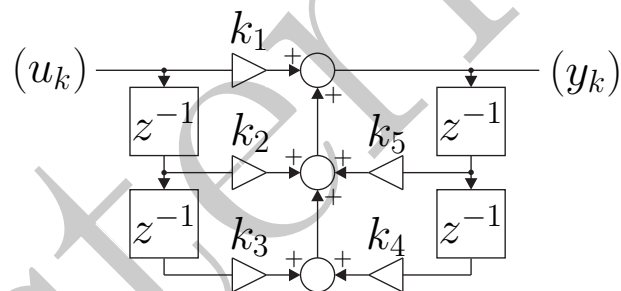


Abbildung 5: Biquad Filter für Aufgabe 2b

Lösung:

a) i.

ii.

b) i.

$$G(s) = \frac{10}{\left(1 + \frac{s}{10^3}\right)\left(1 + \frac{s}{20}\right)}$$

$$R(s) = \frac{20}{3} \frac{1 + s \frac{1}{100}}{s}$$

$$G(z) = \frac{k_1 z^2 + k_2 z + k_3}{z^2 - k_5 z - k_4}$$

ii. $k_1 = 0, k_2 = 1 - e^{-\frac{1}{100}}, k_3 = 0, k_4 = 0, k_5 = e^{-\frac{1}{100}}$

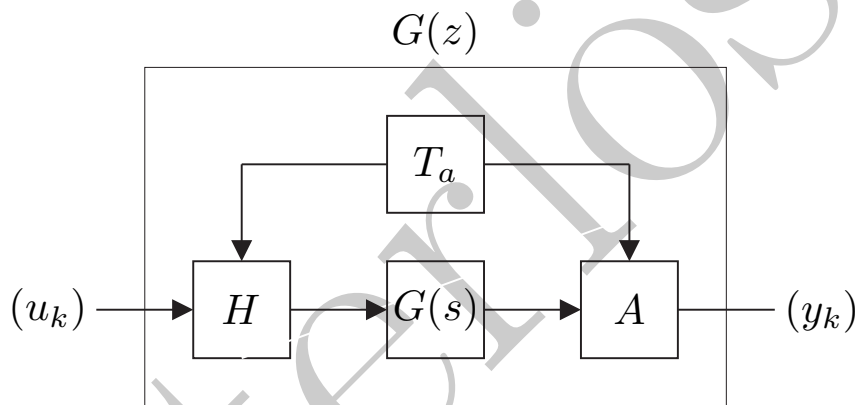


Abbildung 6: Erklärung der kontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$ für Aufgabe 2(b)ii mit dem Abtastglied A und dem Halteglied H .

3. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

12 P.

a) Gegeben ist das lineare zeitinvariante System

4.5 P.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -d & \omega_0 \\ -\omega_0 & -d \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} .\end{aligned}\tag{2}$$

- i. Bestimmen Sie die Hankelmatrix $\mathcal{H}[1, 1]$ des Systems (2). **1.5 P.**
 - ii. Treffen Sie auf Grundlage der Hankelmatrix $\mathcal{H}[1, 1]$ Aussagen über die vollständige Erreichbarkeit und die vollständige Beobachtbarkeit des Systems (2). **0.5 P.**
 - iii. Wie hängen die Markovparameter im Zeitkontinuierlichen mit der Impulsantwort zusammen? **1 P.**
 - iv. Was versteht man unter einem Rechts- und Linkseigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$? Wie ist der Zusammenhang zu den Eigenvektoren von $\mathbf{A}^T$? **1.5 P.**
- b) Gegeben ist die Impulsantwort eines linearen, zeitinvariante Systems mit **2.5 P.**

$$g(t) = e^{\alpha t} - te^{-\beta t} + \gamma \cos(\omega t) .$$

- i. Charakterisieren Sie die BIBO-Stabilität des Systems für die beiden Fälle **1.5 P.**
 - I) $\gamma \neq 0$
 - II) $\gamma = 0$in Abhängigkeit von α und β . Begründen Sie Ihre Antwort.
 - ii. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der BIBO-Stabilität und der asymptotischen Stabilität eines Systems? **1 P.**
- c) Für das System **5 P.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & a \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

soll die Lösungstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ bestimmt werden. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

- i. Bestimmen Sie die Ähnlichkeitstransformation $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t)$ in die Jordansche Normalform. **1.5 P.**
- ii. Geben Sie die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und die transformierte Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}(t)$ an. **1 P.**
- iii. Bestimmen Sie die Lösungstrajektorie des transformierten Systems $\mathbf{z}(t)$. **1 P.**
- iv. Bestimmen Sie die Lösungstrajektorie des Originalsystems $\mathbf{x}(t)$ **1.5 P.**

Lösung:

- a) i. $\mathcal{H}[1, 1] = \begin{bmatrix} 1 & -d \\ -d & d^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix}$
ii. $\text{rang}(\mathcal{H}[1, 1]) = 2 \rightarrow$ vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar.
iii.

$$g(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b}$$
$$\left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \mathbf{g}(t) \right)_{t=0} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} = m_k, \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

- iv. Rechtseigenvektor: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
Linkseigenvektor: $\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \lambda\mathbf{x}^T$
Linkseigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind Rechtseigenvektoren von $\mathbf{A}^T$.

- b) i. $\gamma \neq 0$: $\cos(\omega t)$ nicht absolut integrierbar $\rightarrow$ instabil.
 $\gamma = 0$: stabil für $\alpha < 0$ und $\beta > 0$.

- c) i. $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
ii. $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-5t) \end{bmatrix}$
iii. $\mathbf{z}(t) = \tilde{\Phi}(t) \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-5t) \end{bmatrix} \mathbf{z}_0$, mit $\mathbf{z}_0 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0$.
iv. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \tilde{\Phi}(t) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & \frac{a}{3}(\exp(-2t) - \exp(-5t)) \\ 0 & \exp(-5t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$, mit
 $\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}\tag{3}$$

soll ein geeigneter Zustandsregler und Zustandsbeobachter entworfen werden.

- a) Zur Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises soll ein Zustandsregler verwendet werden, der asymptotische Stabilität gewährleistet. Welcher Rückführvektor **2 P. |**

I) $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}$

II) $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 11 & -10 \end{bmatrix}$

ist dafür geeignet. Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie für Ihre Wahl die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises.

- b) Begründen Sie, warum zur Realisierung des Zustandsreglers aus Aufgabe a) für das System (3) ein Zustandsbeobachter benötigt wird. **0.5 P. |**
- c) Weisen Sie die vollständige Beobachtbarkeit des Systems nach. **1 P. |**
- d) Geben Sie für das System (3) einen vollständigen Luenberger-Beobachter so an, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamik bei -4 und -6 zu liegen kommen. **3 P. |**
- e) Wie lautet das charakteristische Polynom des gesamten geschlossenen Regelkreises, bestehend aus System, Zustandsregler und Zustandsbeobachter? **1.5 P. |**

Lösung:

- a) I) $\lambda_{1,2} = \pm 3i \rightarrow$ nicht asymptotisch stabil.
II) $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -5 \rightarrow$ asymptotisch stabil.
- b) Zustandsvektor ist nicht vollständig messbar.
- c) $\text{rang}(\mathcal{O}(\mathbf{c}^T, \mathbf{A})) = 2 \rightarrow$ vollständig beobachtbar.
- d) $\hat{\mathbf{k}}^T = [-16.5 \quad -6]$
- e) $p^*(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda + 5)(\lambda + 6)$