Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 25.09.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:
Hörsaal/Sitzplatznummer:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	8.5	11.5	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Folgende Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. **8.5 P.**

   a) In Abbildung 1 ist die Impulsantwort $g(t)$ eines linearen, zeitinvarianten (LTI) Systems skizziert. **3.5 P.**

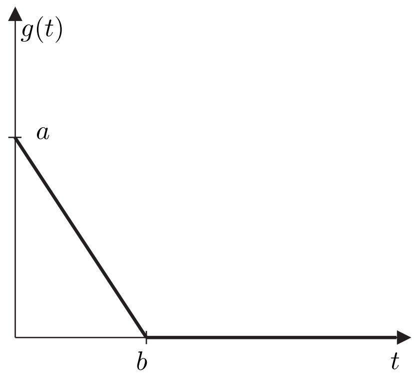


Abbildung 1: Impulsantwort eines LTI-Systems.

      i. Ist dieses System BIBO-stabil? (Begründen Sie Ihre Antwort!) 0.5 P.
      ii. Berechnen Sie die Sprungantwort $h(t)$ dieses Systems. 2.5 P.
      iii. Ist dieses System sprungfähig? (Begründen Sie Ihre Antwort!) 0.5 P.

   b) Gegeben ist ein einfacher Regelkreis mit der Übertragungsfunktion **5 P.**

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad a \geq 0 \tag{1}$$

   und einem Regler $R(s)$.

      i. Zeigen Sie, dass für $a = 0$ der geschlossene Kreis mit einem PI-Regler nicht stabilisiert werden kann. 2 P.
      ii. Bestimmen Sie für ein beliebiges $a \geq 0$ die Parameter eines PID-Reglers der Form 2 P.

$$R(s) = Ks + \frac{I}{s} + V \tag{2}$$

      so, dass alle Polle des geschlossenen Kreises bei $s = -1$ liegen.
      iii. Was muss unternommen werden, damit der entworfene Regler (2) realisiert werden kann? 1 P.

Lösung:

a) i. *Ja.*

ii. *Die Sprungantwort $h(t)$ lautet:*

$$h(t) = \begin{cases} at - \frac{a}{b}\frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < b \\ \frac{ab}{2}, & b \leq t. \end{cases}$$

iii. *Nein.*

b) i. *Das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises lautet $p_g(s) = s^3 + (V+1)s + I$ und erfüllt somit nicht die notwendige Bedingung eines Hurwitzpolynoms.*

ii. $K = 3 - a$, $V = 2$, $I = 1$.

iii. *$R(s)$ muss um ein Realisierungsterm erweitert werden, d.h., $R_{rel}(s) = R(s)/(1 + sT_R)$ mit $0 < T_R$.*

2. Ein zeitdiskretes zeitinvariantes System mit den reellen Parametern a_i, $i = 1, 3$ wird durch die folgende Differenzengleichungen **11.5 P.|**

$$p_{k+1} = w_k - a_3 p_k + u_k, \quad v_{k+1} = -a_1 p_k, \quad w_{k+1} = v_k \tag{3}$$

mit den Zustandsgrößen p_k, v_k, w_k, dem Eingang u_k und dem Ausgang $y_k = p_k$ beschrieben.

a) Skizzieren Sie das Blockschaltbild des zeitdiskreten Systems (3). Markieren Sie dabei in der Skizze folgende Signale: Zustandsgrößen p_k, v_k, w_k, Eingangsgröße u_k und Ausgangsgröße y_k. 2 P.|

b) Geben Sie das System (3) in Zustandsdarstellung 2 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \tag{4a}$$
$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k \tag{4b}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}_k$, dem Eingang u_k und dem Ausgang y_k an. Welche reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}\mathbf{x}_k$ mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ führt das System (4) in die 2. Standardform über?
Hinweis: Die Transformationsmatrix kann direkt abgelesen werden.

c) Für das System (4) wird nun ein Regler in der Form 2.5 P.|

$$\mathbf{x}_{R,k+1} = \mathbf{\Phi}_R\mathbf{x}_{R,k} + \mathbf{\Gamma}_R e_k$$
$$u_k = \mathbf{c}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{R,k} + d_R e_k$$

mit dem Regelfehler $e_k = r_k - y_k$ und der Führungsgröße r_k entworfen. Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung des geschlossenen Regelkreises in der Form $\mathbf{x}_{ges,k+1} = \mathbf{\Phi}_{ges}\mathbf{x}_{ges,k} + \mathbf{\Gamma}_{ges}r_k$, $y_k = \mathbf{c}_{ges}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{ges,k} + dr_k$.

d) Entwerfen Sie für (3) einen vollständigen Luenberger Beobachter so, dass jeder Anfangsfehler $\mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$ in höchstens drei Schritten zu $\mathbf{0}$ übergeht. 2.5 P.|

e) Berechnen Sie den bleibenden stationären Beobachtungsfehler $\mathbf{e}_s = \lim_{k\to\infty}\mathbf{e}_k$ für den Fall, dass das System (4) um eine unbekannte Störung in der Form 2.5 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \mathbf{\Gamma}_d d_k, \quad \mathbf{\Gamma}_d = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad d_k = (1^k) \tag{5}$$

erweitert wird. Schreiben Sie die Gleichung der Beobachtungsfehlerdynamik für diesen Fall an.

Lösung:

a)

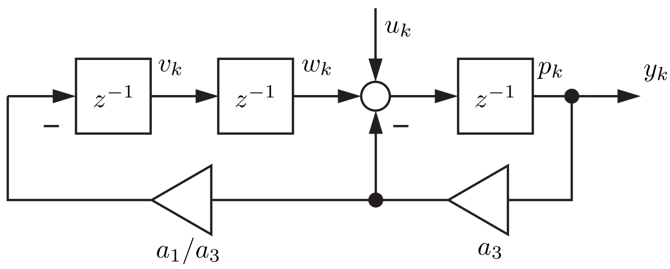


Abbildung 2: Blockschaltbild.

b) Mit dem Zustand $\mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} = [v_k \; w_k \; p_k]$ *lautet die Zustandsdarstellung*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \tag{6a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \tag{6b}$$

und liegt bereits in der 2. Standardform vor. Daher ist $\mathbf{T}$ *die Einheitsmatrix.*

c) Mit dem Gesamtzustand $\mathbf{x}_{ges,k}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{x}_k^{\mathrm{T}} \; \mathbf{x}_{R,k}^{\mathrm{T}}]$ *ergibt sie die Zustandsdarstellung in der Form*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ges,k+1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Gamma} d_R \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{c}_R^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{\Gamma}_R \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Phi}_R \end{bmatrix} \mathbf{x}_{ges,k} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} d_r \\ \boldsymbol{\Gamma}_R \end{bmatrix} r_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{ges,k} \end{aligned}$$

d) Für die Zustandsdarstellung (6) *lautet der Luenberger Beobachter*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_k + \boldsymbol{\Gamma} u_k + \hat{\mathbf{k}} (\hat{y}_k - y_k) \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned}$$

mit $\hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} = [a_1 \; 0 \; a_3]$.

e) Die Beobachtungsfehlerdynamik ergibt sich zu

$$\mathbf{e}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_k - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d_k.$$

Der stationäre Beobachtungsfehler berechnet sich zu $\mathbf{e}_s^{\mathrm{T}} = -[1 \; 1 \; 2]$.

3. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

a) Gegeben ist die Differenzengleichung **7 P.|**

$$y_k - 2y_{k-1} - 5y_{k-2} + 6y_{k-3} = 2u_{k-2} + u_{k-3} \ . \tag{7}$$

i. Geben Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion für (7) an. 1 P.|

ii. Geben Sie das System als Minimalrealisierung in Zustandsdarstellung 2 P.|

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \,, \quad \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + \mathbf{d}u_k \end{aligned}$$

mit dem Eingang u_k und dem Ausgang y_k an.

iii. Geben Sie einen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ an, welcher für $u_k = 0$ zur Lösung 3 P.|

$$\mathbf{x}_k = \lambda^k \mathbf{x}_0 \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

mit einem skalaren Faktor λ führt.
Hinweis: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$

iv. Geben Sie den Ausgang y_k für dieses $\mathbf{x}_0$ an. 1 P.|

b) Die Lösung eines linearen, autonomen Systems der Ordnung n vereinfacht sich für einen beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aufgrund einer speziellen Systemeigenschaft zu **1 P.|**

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{x}_0$$

mit der Dynamikmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und begründen Sie das Ergebnis.

c) Gegeben ist das skalare zeitdiskrete Eingrößensystem der Form **2 P.|**

$$x_{k+1} = \varphi x_k + \gamma u_k$$

mit dem Anfangswert x_0. Geben Sie die allgemeine Lösung dieses Systems an.

Lösung:

a) *i.* $G(z) = \frac{2z+1}{z^3-2z^2-5z+6}$

ii. $\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$

$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$

iii. $\mathbf{x}_0$ *muss ein Eigenvektor von* $\mathbf{\Phi}$ *sein.* $\mathbf{x}_0 \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

b) *Reihendarstellung bricht ab, daraus folgt* $\mathbf{A}^k = \mathbf{0} \quad \forall k \geq n$ *dadurch müssen alle Eigenwerte bei 0 liegen.*

c) $x_k = \varphi^k x_0 + \gamma \sum_{n=0}^{k-1} \varphi^{k-1-n} u_n$

4. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

a) Fertigen Sie eine möglichst genaue und ordentlich beschriftete Skizze der Sprungantwort der Übertragungsfunktion 2 P.|

$$G(s) = e^{-2s} 10 \frac{s+1}{s+10}$$

an.

b) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion 2 P.|

$$G(s) = \frac{s-100}{s\left(s^2 + \sqrt{10}s + 100\right)}$$

in Abbildung 3 ein.

c) Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4s^2 + 9}{s(s^2 + 9)}$$

wird mit der Abtastzeit T_a abgetastet.

i. Bestimmen Sie die entsprechende Übertragungsfunktion $G(z)$ im z-Bereich. 2 P.|

ii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ im q-Bereich. Sie müssen für z nicht einsetzen. 1 P.|

d) Für die q-Übertragungsfunktion 3 P.|

$$G^{\#}(q) = \frac{3+q}{(1+q)(3+\sqrt{3}q)} \tag{8}$$

soll ein PI-Regler der Form

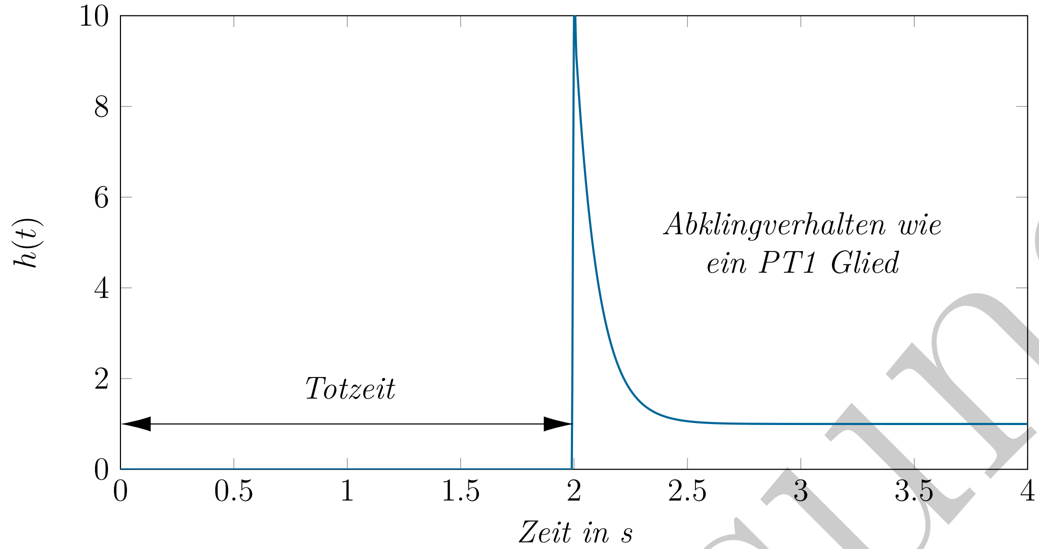
$$R^{\#}(q) = \frac{V_{\mathrm{I}}(1 + qT_{\mathrm{I}})}{q}$$

entworfen werden. Bestimmen Sie die Parameter V_{I} und T_{I} so, dass der geschlossene Regelkreis

- die Anstiegszeit $t_{\mathrm{r}} = \frac{1.2}{\sqrt{3}}$ s, und
- das Überschwingen $\ddot{u} = 25\,\%$

besitzt.

Lösung:



a)

b) *In normierter Form lautet die Übertragungsfunktion* $G(s) = -\frac{1-\frac{s}{100}}{s\left(\left(\frac{s}{10}\right)^2+\frac{1}{10\sqrt{10}}s+1\right)}$.

Das Bodediagramm ist in Abbildung 3 dargestellt.

c) $G(z) = \frac{T_a}{z-1} + \frac{(z-1)\sin(3T_a)}{z^2-2z\cos(3T_a)+1}$

d) $G^{\#}(q) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T_a}{2}q}{1-\frac{T_a}{2}q}}$

e) $T_I = \frac{1}{3}$, $V_I = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$

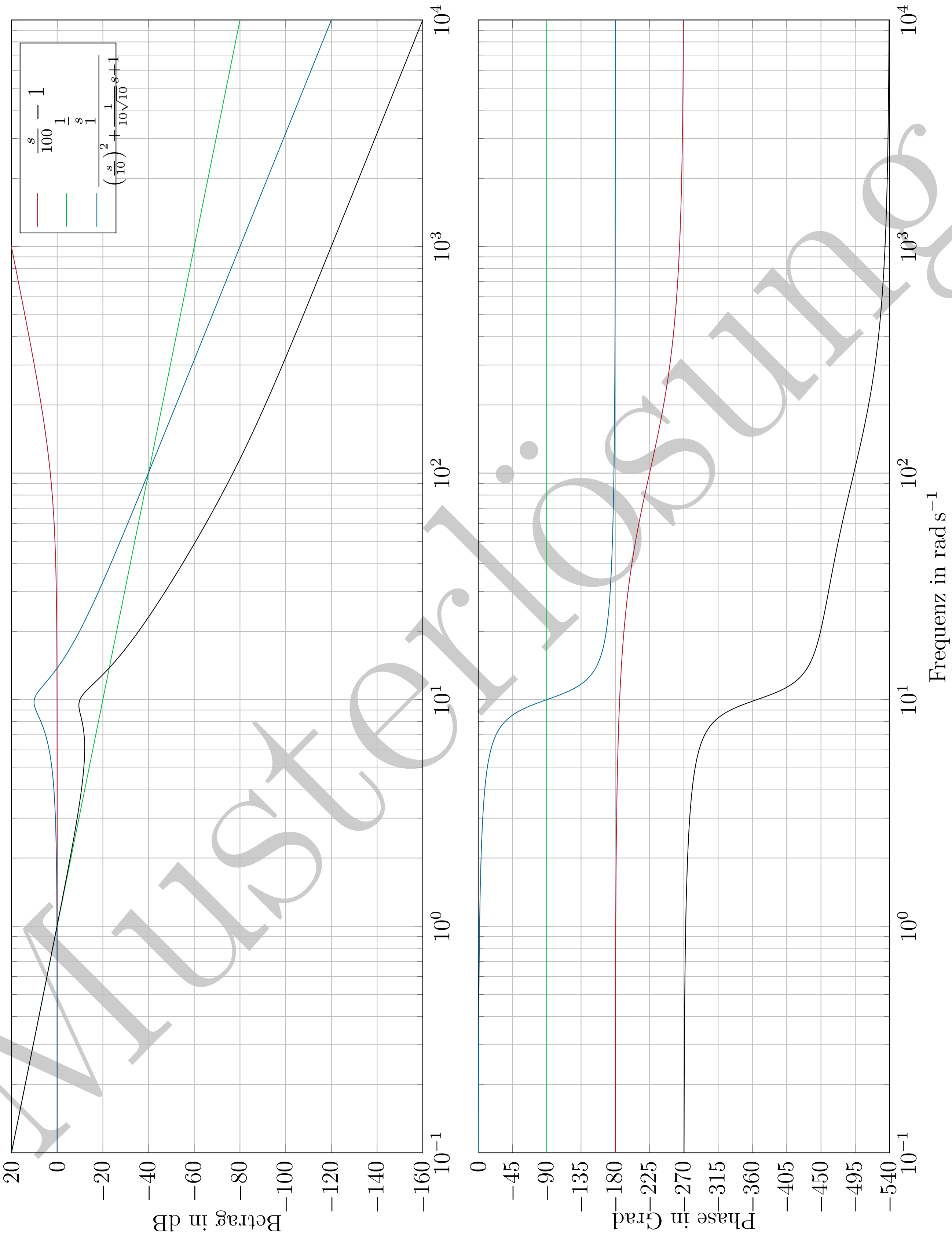


Abbildung 3: Lösung des Bode-Diagramms von Aufgabe 4b