

Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 06.11.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	9	11	10	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Folgende Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 9 P. |

Von verschiedenen zeitdiskreten Systemen mit der Abtastzeit $T_a = 0.1$ s sind die Pol-Nullstellendiagramme in Abbildung 1 gegeben.

- a) Sind die Systeme mit den in Abbildung 1 gezeigten Pol-Nullstellendiagrammen BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P. |
- b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems mit dem Pol-Nullstellendiagramm von Abbildung 1 a) an. Bei der Messung am Ausgang erhält man $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0.01$ wenn als Eingang die Einheitssprungfolge gewählt wird. Dieses Verhalten soll korrekt abgebildet werden. 2 P. |
- c) Für dieses System $G(z)$ wird nun ein Regler der Form 0.5 P. |

$$R(z) = \frac{k}{z - 1} \quad (1)$$

verwendet. Um welche Art von Regler (P, I, D, PI, PD, PID) handelt es sich. Begründen Sie Ihre Antwort.

- d) Die Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten Regelkreises lautet 2 P. |

$$T_{r,y} = \frac{0.2z}{z^3 - 1.3z^2 + 1.1z - 0.6} \quad (2)$$

Am Eingang liegt das Signal $r_k = r(kT_a) = 5\left(\frac{1}{10}\right)^k + 2 \sin(0.5\pi k)$ an. Berechnen Sie die Ausgangsfolge y_k im eingeschwungenen Zustand.

Hinweis: Sie müssen Funktionen nicht explizit auswerten.

- e) Am Ausgang des stabilen Regelkreises, wie in Abbildung 2 dargestellt, mit der Führungübertragungsfunktion (2) tritt eine niederfrequente Störung $g(t)$ auf. Zu dieser Störung steht Ihnen eine zeitdiskrete Schätzung \hat{g}_k zur Verfügung. Wie können Sie die Störung ideal unterdrücken wenn Sie das Signal r_k , wie in Abbildung 2 dargestellt, nur durch einen additiven Term verändern können. 1.5 P. |
Hinweis: Achten Sie darauf, dass Ihre Lösung praktisch realisierbar ist.
- f) In Abbildung 3 ist der Betragsfrequenzgang eines zeitdiskreten Regelkreises $L^\#(q)$, siehe Abbildung 2, gegeben. Skizzieren Sie näherungsweise den Betragsfrequenzgang der beiden Übertragungsfunktionen $T_{r,y}^\#(q)$ und $T_{d,y}^\#(q)$ und begründen Sie ausführlich, wie sie auf dieses Ergebnis kommen. 2 P. |

Lösung:

a) a) Ja, b) Nein

$$b) G(z) = \frac{0.0145z}{z^2 - 0.4z + 0.85}$$

c) Es handelt sich um einen I-Regler.

$$d) y_k = \frac{4}{\sqrt{50}} \sin(0.5\pi k + \arg(1 + 7I))$$

e) Um die Störung zu kompensieren, wird die geschätzte Störung (ideal) mittels

$$\frac{r'(z)}{\hat{g}(z)} = -T_{r,y}^{-1}(z) \quad (3)$$

gefiltert. Die Inverse der Führungsübertragungsfunktion ist jedoch nicht realisierbar und es muss ein Realisierungsterm hinzugefügt werden.

f) Siehe Angabe.

$$T_{r,y}^\#(I\Omega) = \frac{L^\#(I\Omega)}{1 + L^\#(I\Omega)} = \begin{cases} \approx 1, & \text{wenn } \Omega \ll \Omega_C \\ \approx L^\#(I\Omega), & \text{wenn } \Omega \gg \Omega_C \end{cases} \quad (4)$$

$$T_{d,y}^\#(I\Omega) = \frac{1}{1 + L^\#(I\Omega)} = \begin{cases} \approx \frac{1}{L^\#(I\Omega)}, & \text{wenn } \Omega \ll \Omega_C \\ \approx 1, & \text{wenn } \Omega \gg \Omega_C \end{cases} \quad (5)$$

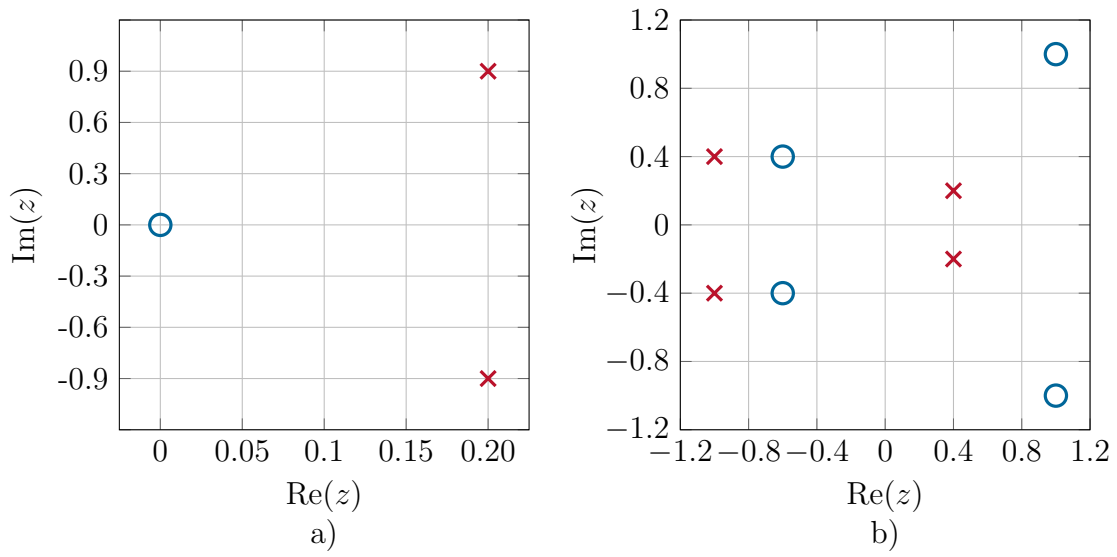


Abbildung 1: Pol-Nullstellen-Diagramm der zeitdiskreten Übertragungsfunktion.

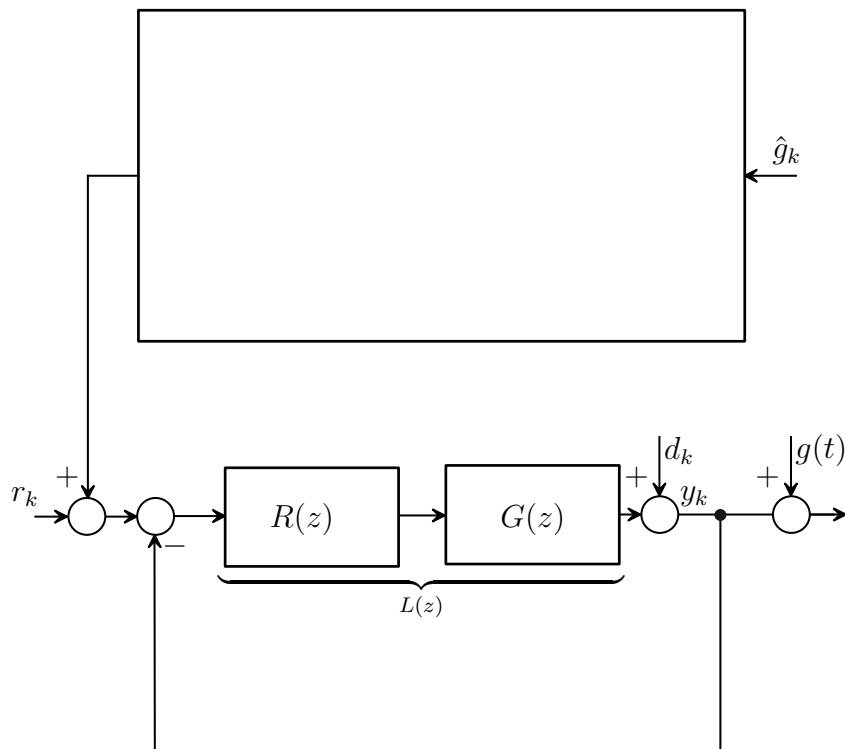


Abbildung 2: Regelkreis.

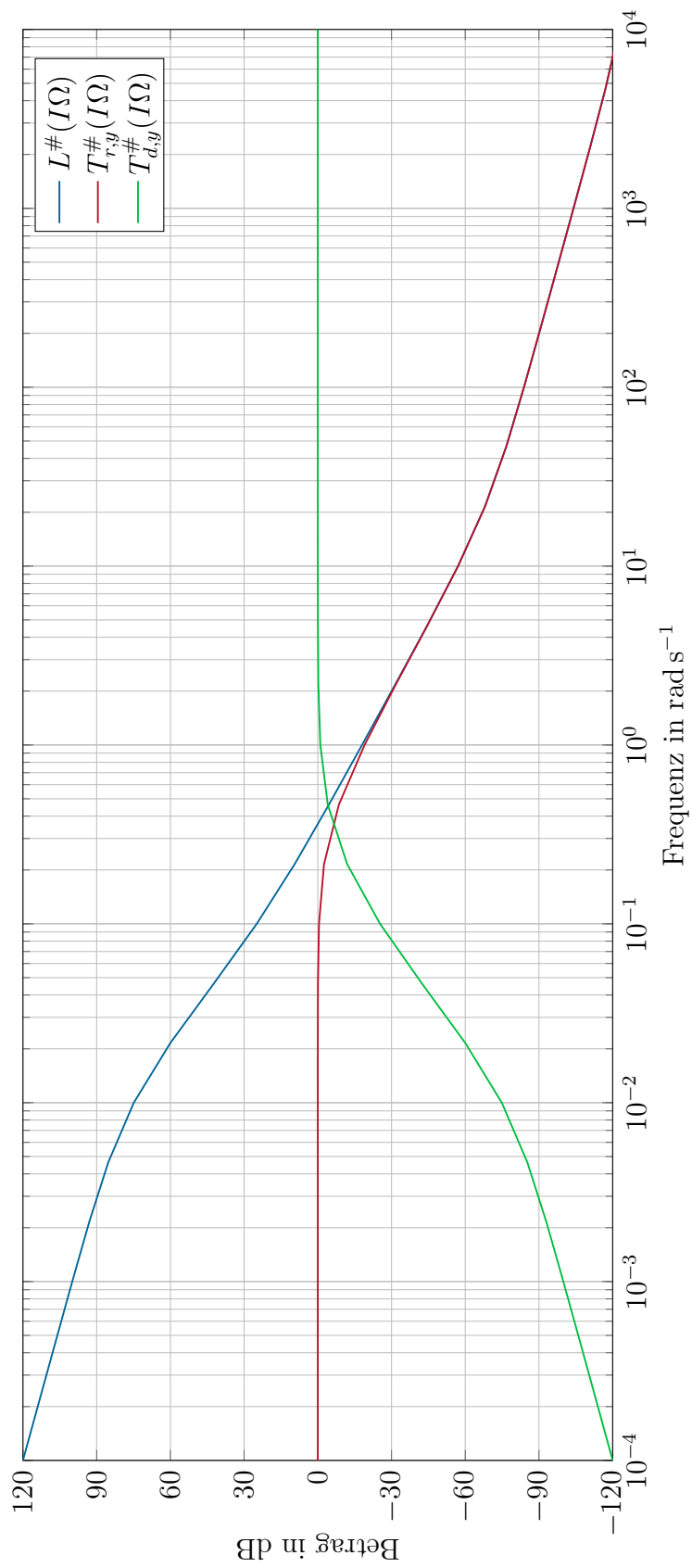


Abbildung 3: Betragsfrequenzgang des offenen Regelkreises $L^\#(q)$.

2. Folgende Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. Ein zeitinvariantes System wird durch die Zustandsraumdarstellung **11 P.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \quad (6a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (6b)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]$, dem Eingang u und dem Ausgang y beschrieben.

- a) Skizzieren Sie das Strukturschaltbild des Systems (6). Markieren Sie dabei in Ihrer Skizze die Zustandsgrößen $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]$, die Eingangsgröße u und die Ausgangsgröße y . **2 P.**
- b) Entwerfen Sie für das System (6) einen Zustandsregler. Die Pole des geschlossenen Kreises sollen bei $s_1 = -7, s_2 = -5$ und $s_3 = -3$ liegen. **3 P.**
- c) Berechnen Sie die zum System (6) zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix. **1 P.**
- d) Kann für das System (6) ein trivialer Beobachter verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 P.**
- e) Für das System (6) wurde ein vollständiger Beobachter der Form **2.5 P.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{k}_b(\hat{y} - y) \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

entworfen. Das charakteristische Polynom der Fehlerdynamik wurde zu $p(\lambda) = (\lambda + 100)^3$ gewählt. Beweisen Sie, dass die Kombination von Zustandsregler und Beobachter zu einem stabilen geschlossenen Kreis führt.

Hinweis: Es genügt nicht anzugeben, dass das Separationsprinzip gilt.

- f) Skizzieren Sie ein Blockschaltbild für den Regelkreis bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Führungsgröße, die Stellgröße sowie die Regelgröße. **1.5 P.**

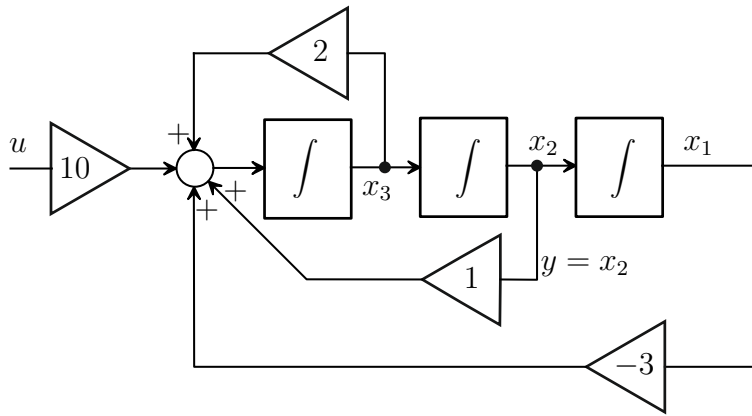


Abbildung 4: Strukturschaltbild.

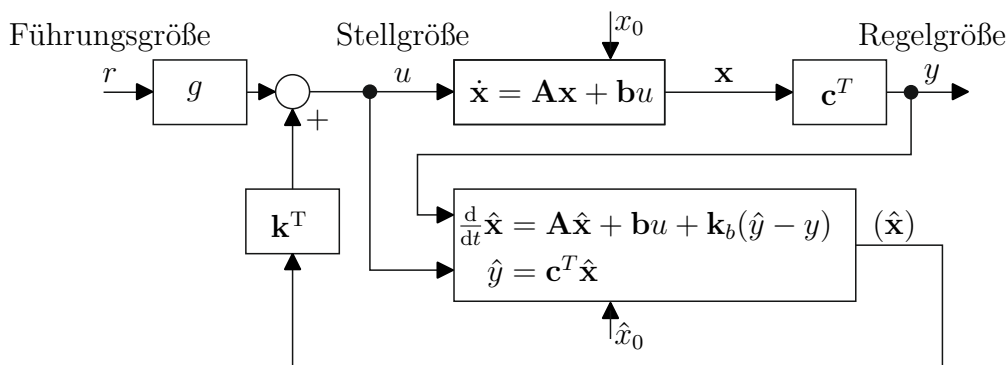


Abbildung 5: Regelkreis.

Lösung:

- Die Lösung ist in Abbildung 4 zu sehen.
- $\mathbf{k}^T = \left[-\frac{102}{10}, -\frac{72}{10}, -\frac{17}{10} \right]$
- Die Beobachtbarkeitsmatrix entspricht der Dynamikmatrix.
- Nein, das System ist nicht stabil (Koeffizienten des charakteristischen Polynoms).
- Durch Einsetzen des geschätzten Zustandes im Regelgesetz ergibt sich die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises zu

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{k}_b\mathbf{c}^T \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Da es sich um eine Blockdreiecksmatrix handelt, ergibt sich das charakteristische Polynom aus der Multiplikation der beiden Einzelpolynome. Da Regler und Beobachter stabil entworfen wurden, ist der geschlossene Kreis ebenso stabil.

- Siehe Abbildung 5.

10 P. |

3. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

7 P. |

$$\begin{aligned} e^{-wb-a} - e^{z-a} + \dot{w} - \ddot{w} &= 0 \\ \cos(wb) + u_1 e^{-u_1 \dot{w}} - \sqrt{u_2} - \dot{z} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

mit den konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und den Eingangsgrößen $u_1 > 0$ und $u_2 > 0$. Der Ausgang y des Systems ist durch die Gleichung

$$y = \dot{w}z + u_1 \quad (9)$$

beschrieben.

- i. Gesucht ist das System (8) - (9) in seiner Zustandsraumdarstellung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $y = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, wobei \mathbf{x} der Zustand und \mathbf{u} der Eingang des Systems ist. 2 P. |
- ii. Berechnen Sie die Menge aller Ruhelagen des Systems (8) für $u_{2,R} = u_{1,R}^2$. Wie viele Ruhelagen besitzt das System ? 2 P. |
- iii. Linearisieren Sie das System um die allgemeine Ruhelage \mathbf{x}_R und \mathbf{u}_R . Geben Sie explizit die Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} an. 2 P. |
- iv. Welche Eigenschaft(en) muss ein System erfüllen, damit das Superpositionsprinzip angewandt werden kann ? 1 P. |

b) Gegeben ist die Übertragungsmatrix eines linearen und zeitinvarianten Systems 3 P. |

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+s} & \frac{5}{(1+s)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (10)$$

mit $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- i. Geben Sie die Dimension n des Systemzustandes, m des Eingangs sowie p des Ausgangs explizit an. 1.5 P. |
- ii. Berechnen Sie die Dynamikmatrix \mathbf{A} des Systems. 1 P. |
- iii. Ist das System aus (10) asymptotisch stabil ? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P. |

Lösung:

a) i.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_2 \\ e^{-a-bx_1} - e^{-a+x_3} + x_2 \\ \cos(x_1 b) + u_1 e^{-u_1 x_2} - \sqrt{u_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h} = h = x_2 x_3 + u_1$$

2 P.

ii.

$$\mathbf{x}_R \in \left\{ x_1 = \frac{\pi k}{2b}, x_2 = 0, x_3 = -\frac{\pi k}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z} \setminus 0,$$

Das System besitzt unendlich viele Ruhelagen.

2 P.

iii.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -be^{-a-bx_{1,R}} & 1 & -e^{-a+x_{3,R}} \\ -b \sin x_{1,R} b & -u_{1,R}^2 e^{-u_{1,R} x_{2,R}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e^{-u_{1,R} x_{2,R}} - u_{1,R} x_{2,R} e^{-u_{1,R} x_{2,R}} & -\frac{1}{2\sqrt{u_{2,R}}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & x_{3,R} & x_{2,R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 P.

iv. Das System muss linear sein und somit die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\mathbf{y}(\alpha_1 \mathbf{x}_{0,1} + \alpha_2 \mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) = \alpha_1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{0}, t) + \alpha_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{0}, \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2, t) = \beta_1 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + \beta_2 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, t)$$

1 P.

b) i. SIMO, $n = 3$, $m = 1$, $p = 2$

1.5 P.

ii. Hier ist leider ein Angabefehler passiert. Das Beispiel sollte lauten:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+s} & \frac{5}{(1+s)(s+2)} & \frac{2s+9}{(s+2)^2(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Damit ist

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+s} & \frac{5}{(1+s)(s+2)} & \frac{2s+9}{(s+2)^2(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

woraus nun folgt:

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}|_{s=0} = -\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Eine weitere Lösungsmöglichkeit wäre der Weg mittels der Transitionsmatrix im Zeitbereich:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{d\Phi(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

1 P.|

- iii. Ja das System ist asymptotisch stabil. In der Übertragungsmatrix kommen nur linear Kombination von BIBO stabilen Teilübertragungsfunktionen vor, wobei es hier zu keinen Pol-Nullstellenkürzungen kommen kann. Die Pole s_i der Teilübertragungsfunktionen liegen alle in der linken offenen s -Halbebene und sind somit die Eigenwerte der Dynamikmatrix A .

0.5 P.|

4. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 10 P. |

a) In Abbildung 6 ist das Bodediagramm des offenen Regelkreises $L(s) = R(s)G(s)$ mit $\lim_{s \rightarrow \infty} sL(s) = V$ zu sehen.

i. Welche Anstiegszeit t_r und welches Überschwingen \ddot{u} weist die Sprungantwort des zugehörigen geschlossenen Regelkreises auf? Wie groß ist die bleibende Regelabweichung $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)}$ bzw. $e_\infty|_{r(t)=t}$? 1.5 P. |

ii. Die zum Bodediagramm zugehörige Strecke des offenen Kreises ist in der Form 2 P. |

$$G(s) = \frac{1}{(s/100 + 1)(s + 1)} \quad (11)$$

gegeben. Entwerfen Sie nun einen PI-Regler $R(s) = \frac{V_I(T_I s + 1)}{s}$ so, dass der geschlossene Regelkreis die Anforderungen $t_r = 1.5s$, $\ddot{u} = 10\%$ erfüllt.

Hinweis: Nehmen Sie an $\tan^{-1}\left(\frac{1}{100}\right) \approx 0$.

iii. Nach dem Entwurf des PI-Reglers fällt Ihnen auf, dass ein größerer Abstand zu den Stellgrößenbeschränkungen besteht. Es wird nun die Anforderung gestellt eine schnellere Anstiegszeit t_r zu erzielen, wobei aber das Überschwingverhalten ($\ddot{u} = 10\%$) gleichbleiben soll. Wie groß ist die kleinste Anstiegszeit die Sie mit Hilfe eines PI-Reglers erreichen können, damit der geschlossene Regelkreis noch BIBO-stabil ist und sich das Überschwingverhalten nicht verändert? Gehen Sie davon aus, dass Sie mit dem PI-Regler die Phase um maximal 60° anheben können. 1.5 P. |

iv. Der PI-Regler soll nun in digitaler Form implementiert werden. Wie lauten die Differenzgleichungen für die Implementierung eines zeitdiskreten PI-Reglers? 1 P. |

b) Die Nyquist-Ortskurven der offenen Regelkreise $L_i(s)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ 2.5 P. |

$$L_1(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 10)(s + 3)(s - 10^{-3})}; \quad (12)$$

$$L_2(s) = \frac{s - 2}{s(2s^2 - 0.5s + 3)}; \quad (13)$$

$$L_3(s) = \frac{20(s + 2)}{10s^2 + 4s + 100} \quad (14)$$

sind in den Abbildungen 7 zu sehen. Ordnen Sie zuerst die Übertragungsfunktionen (12)-(14) den Ortskurven zu. Welcher der geschlossenen Regelkreise ist BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antworten!

c) Die Übertragungsfunktion einer Strecke $G(s)$ ist mit 1.5 P. |

$$G(s) = \frac{1}{(s - 1)(s + 8)} \quad (15)$$

gegeben. Ist es möglich, die Strecke mit Hilfe eines P-Reglers $R(s) = K_p$ zu stabilisieren? Falls es möglich ist, für welchen Wertebereich K_p ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil?

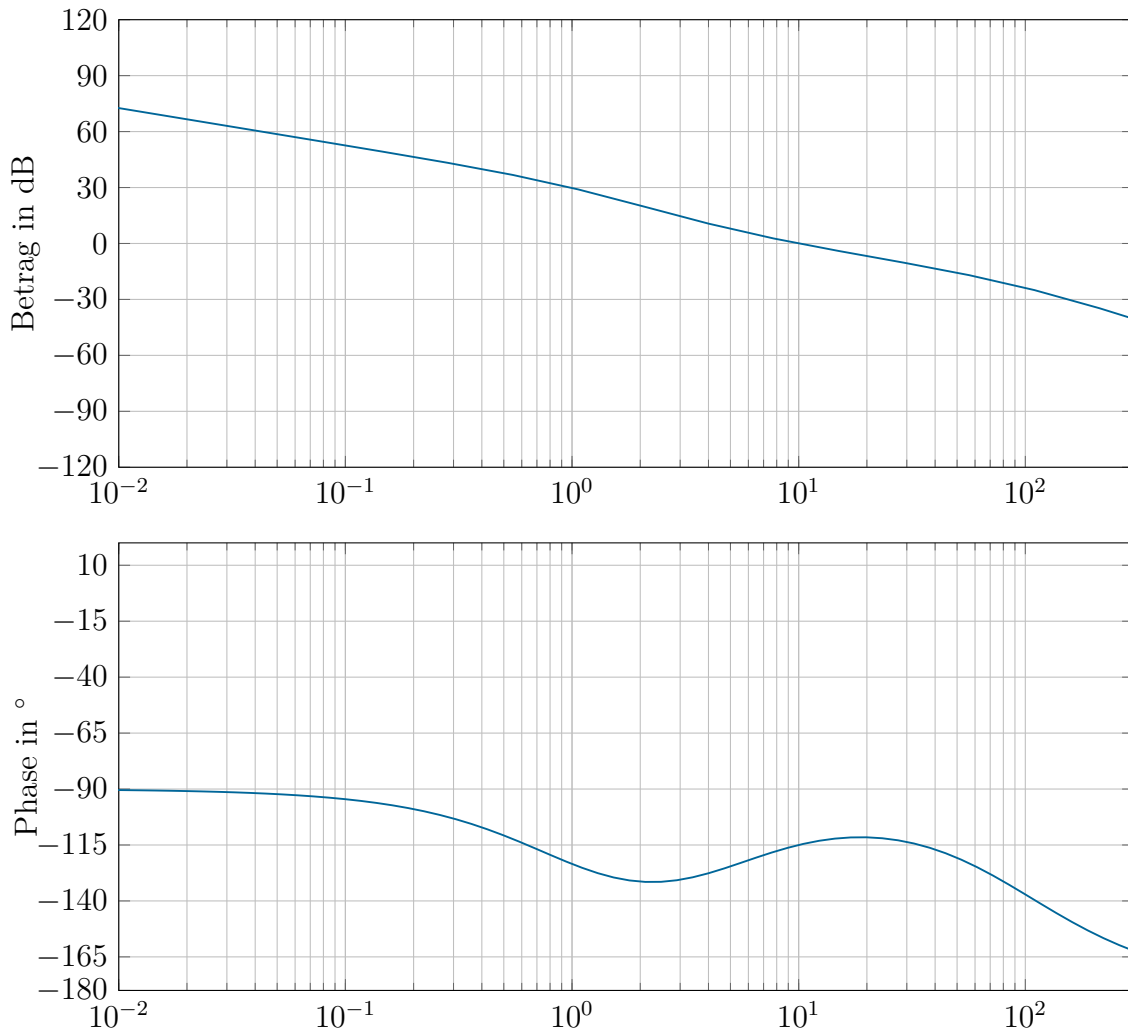


Abbildung 6: Betrags- und Phasenfrequenzgang des offenen Regelkreises $L(s)$.

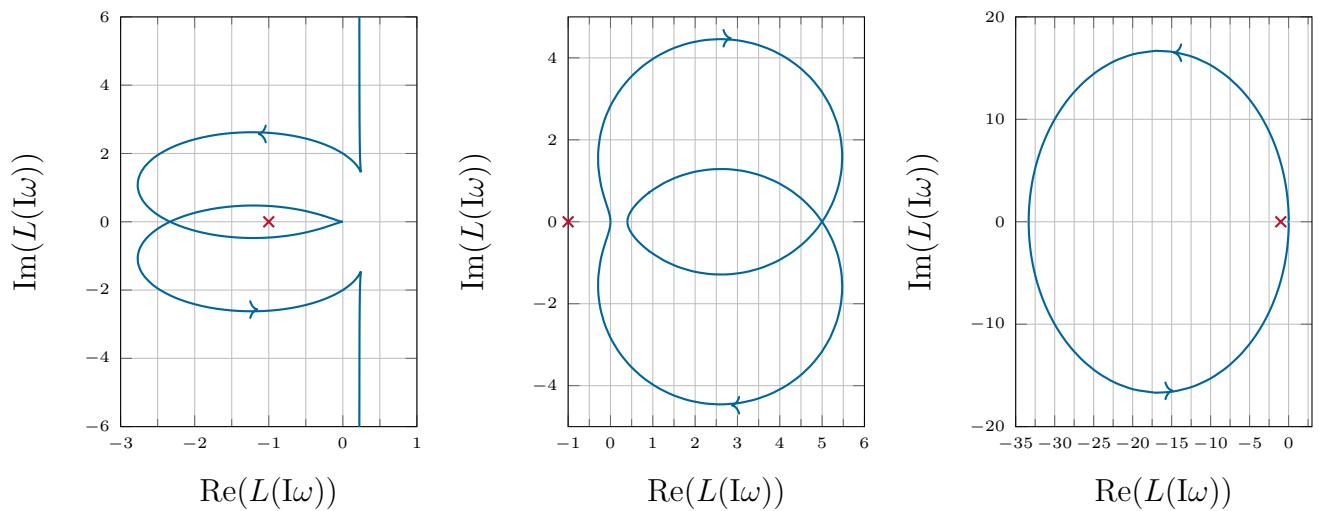


Abbildung 7: Nyquist-Ortskurven der Übertragungsfunktionen $L_i(s)$ aus Aufgabenteil 4b).

Lösung:

- a) i. Durch Ablesen aus dem Bodediagramm an der Durchtrittsfrequenz ω_c erhält man: $t_r = 0.15s$, $\ddot{u} = 5$

Der offene Kreis $L(s)$ besitzt einen Integrator, deshalb gilt in den beiden Fällen für die bleibende Regelabweichung $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$ bzw. $e_\infty|_{r(t)=t} = \frac{1}{V}$.

1.5 P.

- ii. Es müssen die Bedingungen

$$\omega_c = \frac{1.5}{t_r}, 70^\circ - \ddot{u} = 60^\circ, \arg\left\{\frac{T_I s + 1}{s} G(s)\right\}_{s=j\omega_c} = -120^\circ, |V_I \frac{T_I s + 1}{s} G(s)|_{s=j\omega_c} = 1$$

gelten, damit die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt werden.

$$V_I = \frac{99\sqrt{3}}{200} + \frac{101}{200} \approx \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+(\frac{1}{100})^2}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}} \approx 1.362, T_I = \frac{101\sqrt{3}-99}{99\sqrt{3}+101} \approx 2 -$$

2 P.

$$\sqrt{(3)} \approx 0.28$$

- iii. Mit dem Term $T_I s + 1$ des PI-Reglers lässt sich die Phase um genau 60° anheben, weshalb gelten muss $\arg\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}_{s=j\omega_c} = -\pi$,
woraus nun folgt $\omega_c = 10$, $t_r = 0.15$

1.5 P.

iv.

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{z-1}{z} \mathbf{Z}\left(V_I \frac{T_I s + 1}{s} \frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{z-1}{z} V_I \left(\frac{z T_I}{z-1} + \frac{z T_a}{(z-1)^2}\right) = V_I \left(T_I + \frac{T_a}{z-1}\right) \end{aligned}$$

$$y_{k+1} = y_k + V_I T_I (u_{k+1}) + (V_I T_a - V_I T_I) u_k$$

Zustandsraumdarstellung:

$$x_{k+1} = x_k + V_I T_a u_k$$

$$y_k = x_k + V_I T_I u_k$$

1 P.

- b) Die Stabilität des geschlossenen Kreises kann mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums aus dem Satz 4.5 des Vorlesungsskripts überprüft werden.

2.5 P.

$L_1 = c.)$ BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(1, 3) - 2 + 1)\pi = 2\pi$, aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + L_1(I\omega)) = 2\pi$

(Hinweis: In der Angabe der Prüfung waren die Pfeile verdreht, abgelesene Winkeländerung $\Delta \arg(1 + L_1(I\omega)) = -2\pi \rightarrow$ daraus würde Instabilität folgen)

$L_2 = a.)$ nicht BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(1, 3) - 0 + 2)\pi = 5\pi$, aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + L_2(I\omega)) = 3\pi$

$L_3 = b.)$ BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(1, 2) - 2 + 0)\pi = 0$ aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + L_3(I\omega)) = 0$

- c) Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $T_{r,y} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p}{s^2 + K_p + 7s - 8}$, BIBO-stabil für $K_p > 8$ mit Hilfe des Routh-Hurwitz-Theorems

1.5 P.