Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 03.02.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	12	9	8	11	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **12 P.|**

   a) Gegeben ist das autonome System **6 P.|**

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= \omega\beta \\
\dot{\beta} &= -\omega\alpha \\
\dot{\omega} &= 0.
\end{aligned}
$$

      i. Bestimmen Sie für die Anfangsbedingungen $\tilde{\alpha}(0) = 0$, $\tilde{\beta}(0) = 1$, $\tilde{\omega}(0) = \bar{\omega}$ die Trajektorie $\tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(t) & \tilde{\beta}(t) & \tilde{\omega}(t) \end{bmatrix}$. 3 P.|

      ii. Linearisieren Sie das nichtlineare System um die Trajektorie $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ und geben Sie das linearisierte System an. 2 P.|

      iii. Welche Aussagen können Sie über das um die Trajektorie linearisierte System hinsichtlich der Systemeigenschaften Linearität und Zeitinvarianz treffen? 1 P.|

   b) Gegeben ist folgendes Übertragungsglied **6 P.|**

$$
R(s) = V \frac{1 + sT}{1 + s\frac{T}{3}}.
$$

      i. Um welches Übertragungsglied handelt es sich bei $R(s)$? Berechnen Sie weiters jene Kreisfrequenz $\omega = \omega_{\mathrm{max}}$ bei der $\arg(R(\mathrm{I}\omega))$ maximal wird sowie den Wert $\varphi_{\mathrm{max}} = \arg(R(\mathrm{I}\omega_{\mathrm{max}}))$. 3 P.|
      Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

      ii. Das Übertragungsglied $R(s)$ soll als Regler für die Übertragungsfunktion 3 P.|

$$
G(s) = \frac{1}{s^2}
$$

      dienen. Bestimmen Sie die Parameter V und T des Reglers $R(s)$, sodass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises eine Anstiegszeit von $t_r = 0.15\,\mathrm{s}$ erreicht und die Phasenreserve Φ maximal wird. Wie groß ist die erreichte Phasenreserve Φ?

Lösung:

a) *i.* *Die Zustandstrajektorie lautet*

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(t) &= \sin(\bar{\omega}t)\\ \tilde{\beta}(t) &= \cos(\bar{\omega}t)\\ \tilde{\omega}(t) &= \bar{\omega}.\end{aligned}$$

ii.

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega} & \cos(\bar{\omega}t) \\ -\bar{\omega} & 0 & -\sin(\bar{\omega}t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii. *Das linearisierte System ist linear und zeitvariant.*

b) *i.* *Es handelt sich um ein Lead-Glied.*

$$\omega_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{T}, \quad \varphi_{\max} = \frac{\pi}{6}$$

ii.

$$V = \frac{100}{\sqrt{3}}, \qquad T = \frac{\sqrt{3}}{10}\mathrm{s}, \qquad \Phi = \frac{\pi}{6}$$

2. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **9 P.|**

a) Für das System **6 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} u_k \tag{1a}$$
$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + v_k \tag{1b}$$

mit

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und der Störung v_k am Ausgang soll ein vollständiger Luenberger Beobachter entworfen werden.

i. Bestimmen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ sodass das charakteristische Polynom der Beobachterfehlerdynamikmatrix $\hat{p}_{\mathrm{soll}}(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$ lautet. **Hinweis:** Vernachlässigen Sie für diesen Punkt die Störung v_k. 3 P.|

ii. Geben Sie die Differenzengleichung der Beobachterfehlerdynamik $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ an. Wie groß ist der stationäre Beobachterfehler $\mathbf{e}_\infty$ für $(v_k) = (1^k)$? 3 P.|

b) Die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{4}$ und zugehörigen Eigenvektoren **3 P.|**

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

der Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}$ eines zeitdiskreten Systems sind bekannt. Der Ausgangsvektor lautet $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [a \quad b \quad 0]$ mit den unbekannten Parametern a und b.

i. Kann für das System ein trivialer Beobachter verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

ii. Welche Bedingungen für a und b müssen erfüllt sein damit das System vollständig beobachtbar ist? 2 P.|

Lösung:

a) *i.*

$$\hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

ii.

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_e \mathbf{e}_k - \hat{\mathbf{k}} v_k$$

$$\mathbf{\Phi}_e = \mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\infty^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

b) *i. Es kann ein trivialer Beobachter verwendet werden, da für alle Eigenwerte $|\lambda_i| < 1$ gilt.*

ii. Es muss $a \neq b$ und $b \neq 0$ gelten.

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **8 P.|**

a) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante System nach Abbildung 1. **4 P.|**

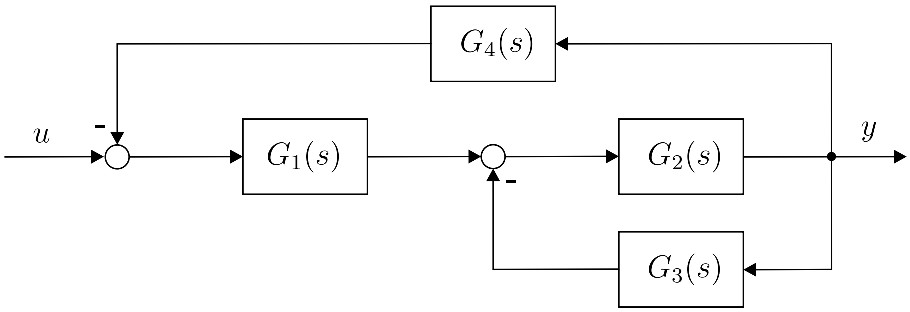

Abbildung 1: Blockschaltbild.

i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ vom Eingang u zum Ausgang y. 2 P.|

ii. Für die Übertragungsfunktionen gelte nun $G_1(s) = 3$, $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$, $G_3(s) = \frac{1}{2s+a}$ und $G_4(s) = \frac{1}{s}$. Geben Sie an für welche Werte von a die Übertragungsfunktion BIBO-stabil ist und begründen Sie Ihre Antwort! 2 P.|

b) Gegeben ist die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion **4 P.|**

$$G(s) = \frac{5s+6}{s^2+2s} \,. \tag{2}$$

i. Berechnen Sie die q-Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ zu (2) mit der Abtastzeit $T_a = 2$. 2 P.|

ii. Ist die berechnete q-Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

iii. Geben Sie die allgemeine Berechnungsvorschrift an, um eine q-Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ ausgehend von einer zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion $G(s)$ mit der Abtastzeit T_a zu berechnen. 1 P.|

Lösung:

a) i. *Die Übertragungsfunktion berechnet sich zu*

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_4(s)} \ .$$

ii. *Einsetzen der gegebenen Übertragungsfunktionen ergibt*

$$G(s) = \frac{6s^2 + 3as}{2s^3 + (a+2)s^2 + (a+7)s + 3a} \ .$$

Aus Pivotspalte der Routh-Hurwitz Tabelle folgt $a > 0$.

b) i. *Die q-Übertragungsfunktion lautet*

$$G^{\#}(q) = 3\frac{1-q}{q} + \frac{1-q}{1 + \frac{q}{\tanh(2)}} \ .$$

ii. *Die q-Übertragungsfunktion ist nicht sprungfähig.*

iii. *Die Berechnungsvorschrift ist durch*

$$G^{\#}(q) = \frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\bigg|_{z=\frac{1+\frac{T_a}{2}q}{1-\frac{T_a}{2}q}}$$

gegeben.

4. *Die Aufgaben a) - c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **11 P.|**

a) Es soll ein Kaskadenregler das zeitkontinuierliche System von Abbildung 2 mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ auf einem Digitalrechner entworfen werden. Es treten jeweils die Ausgangsstörungen d_1 und d_2 auf. **5 P.|**

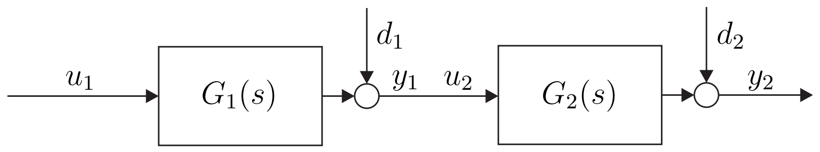

Abbildung 2: Blockschaltbild des zeitkontinuierlichen Systems.

i. Zeichnen Sie das Blockschaltbild für den gewünschten zeitdiskreten Kaskadenregelkreis mit den erforderlichen Analog/Digital- und Digital/Analog Wandlern und beschriften Sie die Stellen, wo die Referenzsignale r_1 und r_2 und die Regelfehler e_1 und e_2 auftreten. Unterscheiden Sie bei der Beschriftung zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Signalen. Kennzeichnen Sie zusätzlich alle Signale, die auf dem Digitalrechner verarbeitet werden. 4 P.|

ii. Welche Bedingung muss gelten, damit beide Regelkreise getrennt voneinander entworfen werden können? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

b) Gegeben ist die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = \frac{s^2 + as + b}{(s+1)^2}$$

und die harmonische Eingangsgröße der Form

$$u(t) = A\sin(t + \varphi_0) \ .$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Ausgangsgröße im eingeschwungenen Zustand identisch Null ist.

c) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT_t}}{s} \ , T_t > 0 \ .$$

i. Skizzieren Sie die Sprungantwort der Übertragungsfunktion. 2 P.|

ii. Ist dieses System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

Lösung:

a) i. *Siehe Abbildung 3.*

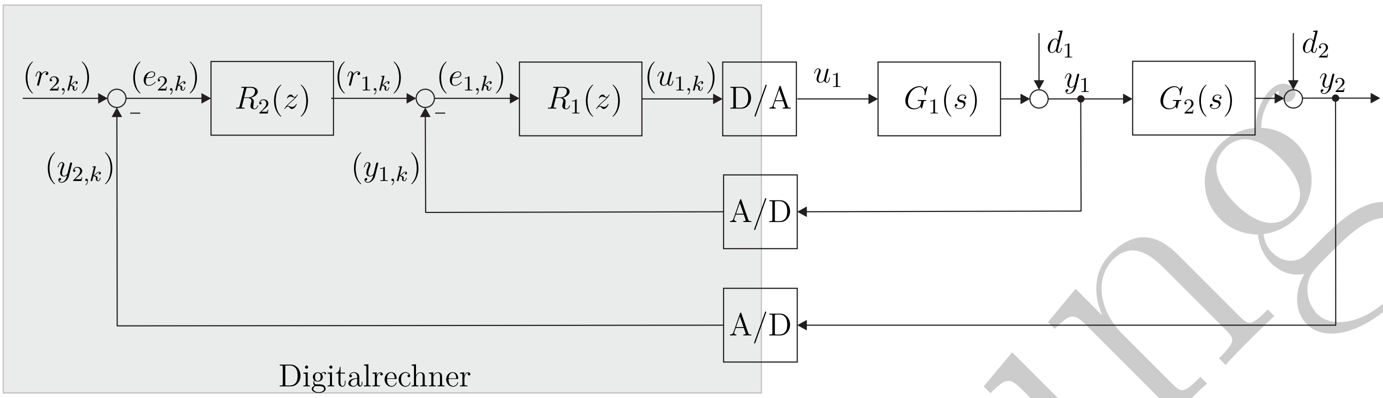

Abbildung 3: Zeitdiskreter Kaskadenregelkreis.

ii. *Für den äußeren Regelkreis muss der innere Regelkreis wie eine Durchschaltung wirken, d.h. der innere Regelkreis muss typischerweise eine Dekade schneller ausgelegt sein.*

b) *Für die Parameter muss* $a = 0$ *und* $b = 1$ *gelten.*

c) i. *Abbildung 4 zeigt die Sprungantwort.*

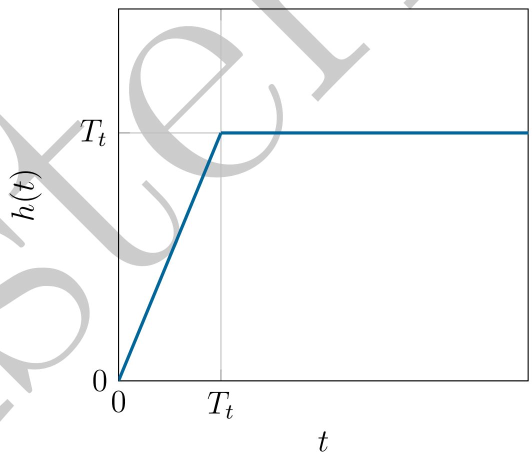

Abbildung 4: Sprungantwort $h(t)$.

ii. *Das System ist BIBO-stabil.*