Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 31.03.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist der Regelkreis aus Abbildung 1 mit $G(s)$ und $R(s)$. **4 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 6}$$

$$R(s) = \frac{K}{s}$$

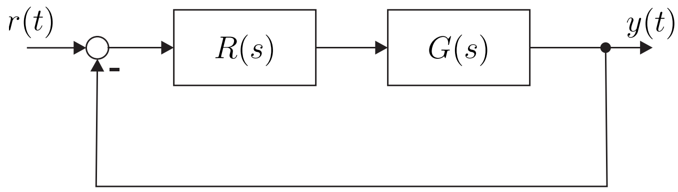

Abbildung 1: Geschlossener Regelkreis zu Aufgabe 1a).

i. Bestimmen Sie unter Verwendung des Routh-Hurwitz-Verfahrens den Wertebereich von K so, dass der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist. 2.5 P.|

ii. Bestimmen Sie die bleibende Regelabweichung bei einer rampenförmigen Eingangsgröße. 1.5 P.|

b) Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen **4.5 P.|**

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 2u(t) + \dot{u}(t), \tag{1}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - 3y(t) = 2u(t) + \dot{u}(t), \tag{2}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 2u(t) - \dot{u}(t). \tag{3}$$

Begründen Sie für jede der Differentialgleichungen (1), (2) und (3), ob für $u(t) = u_\infty = konst.$ ein stationärer Endwert $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existiert. Falls ein stationärer Endwert existiert, berechnen Sie $y(0+)$, $y(\infty)$ und $\dot{y}(0+)$ und skizzieren Sie die Sprungantwort.

c) Geben Sie für das nachfolgende System zweiter Ordnung die Kreisfrequenz ω_0, die Verstärkung V und die Dämpfung ξ an. **1.5 P.|**

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 6y(t) = 6u(t)$$

Lösung:

a) *i.*

$$a_{01} = 1, a_{02} = 6, a_{11} = 4, a_{12} = K, a_{21} = 6 - \frac{K}{4}, a_{31} = K$$

$$0 < K < 24$$

ii.

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{6}{K}$$

b) *Für (1) und (2) sind die systeme instabil und schwingen auf. Für sie existiert kein stationärer Endwert. Für (3) ist das System stabil.*

$$y(0+) = 0$$
$$y(\infty) = \frac{2}{3}$$
$$\dot{y}(0+) = -1$$

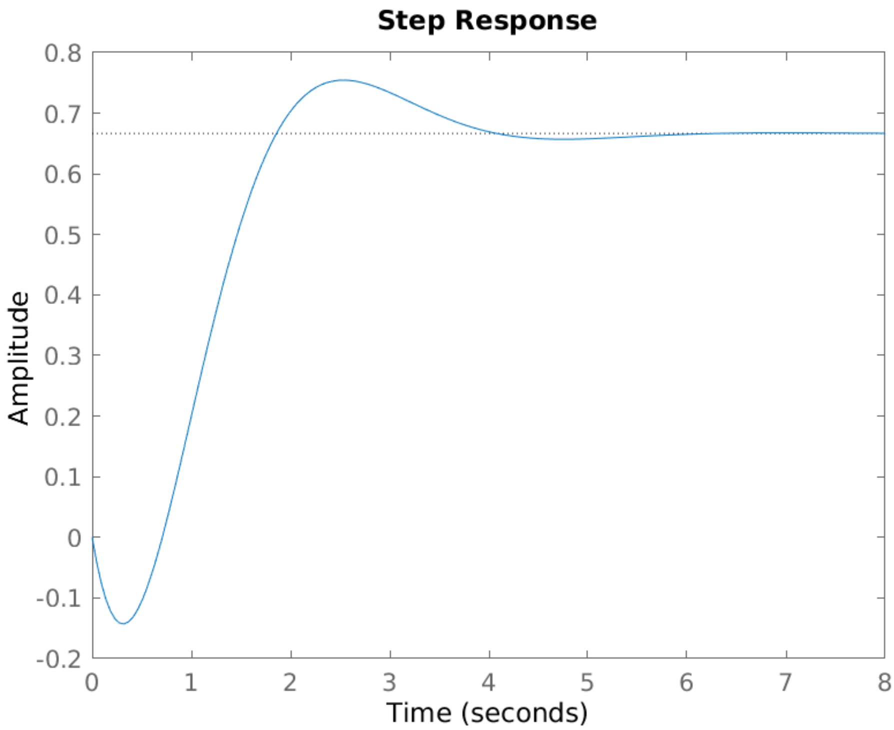

Abbildung 2: Sprungantwort zu Aufgabe 1b)

c)

$$\omega_0 = \sqrt{6}$$
$$V = 1$$
$$\xi = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

2. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben sind die Übertragungsfunktion $G(s)$ und das Übertragungsglied $R(s)$ **4.5 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{(s + \frac{\sqrt{3}}{9})(s + \frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$$R(s) = V\frac{1 + sT}{s}$$

i. Um welches Übertragungsglied handelt es sich bei $R(s)$? 0.5 P.|

ii. Das Übertragungsglied $R(s)$ soll als Regler für die Übertragungsfunktion $G(s)$ dienen. Bestimmen Sie die Parameter V und T des Reglers $R(s)$ so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises die folgenden Eigenschaften erfüllt: 4 P.|

A. Anstiegszeit: $t_r = 4.5\,\mathrm{s}$

B. Überschwingen: $\ddot{u} = 25\%$

b) Gegeben ist das Übertragungsglied **2.5 P.|**

$$\bar{G}(s) = \frac{1 + s}{1 + s\eta}, \quad \text{mit} \quad 0 < \eta < 1\,.$$

i. Um welches Übertragungsglied handelt es sich bei $\bar{G}(s)$? 0.5 P.|

ii. Skizzieren Sie für das Übertragungsglied $\bar{G}(s)$ das Bodediagramm für $\eta = 0.01$. 2 P.|

c) Die Impulsantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems zweiter Ordnung lautet **3 P.|**

$$g(t) = e^{-2t}\sin(t).$$

Beweisen Sie, dass das zugehörige System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist.

Lösung:

a) *i.* *PI-Glied, PI-Regler*

ii.

$$T = 3$$

$$V = \frac{2\sqrt{6}}{81}$$

b) *i.* *Lead-Glied*

ii. *Die Knickfrequenzen des Übertragungsgliedes ablesen, wobei $T = 1$ ist.*

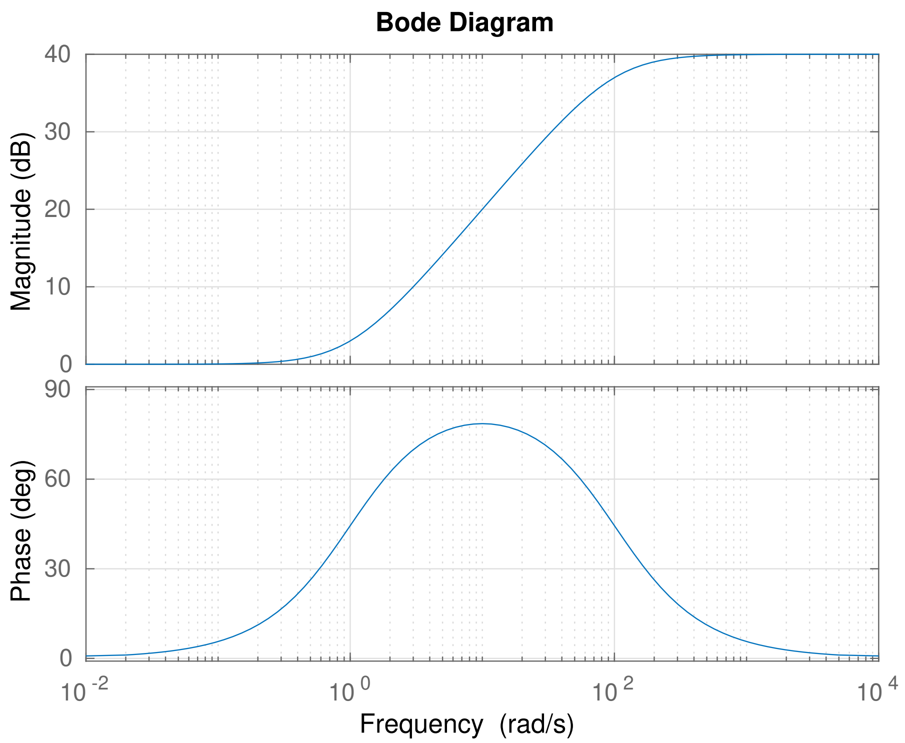

Abbildung 3: Bodediagramm zu Aufgabe 2b).

c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beobachtbarkeitsmatrix hat vollen Rang:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Erreichbarkeitsmatrix hat vollen Rang:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Das System ist vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar.

3. Gegeben ist das System **10 P.**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \tag{4a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{4b}$$

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Ist das System (4) asymptotisch stabil? **2 P.**
<u>*Hinweis*</u>*: Nutzen Sie die Blockdiagonalstruktur der Dynamikmatrix* $\mathbf{\Phi}$.

b) Kann man für das System (4) einen trivialen Beobachter entwerfen? Begründen Sie Ihre Antwort! **3 P.**
Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des trivialen Beobachters und des Beobachtungsfehlers an. Wie groß ist der Beobachtungsfehler zum Zeitpunkt $k = 9$ für einen Anfangsbeobachtungsfehler $\mathbf{e}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 64 & 32 \end{bmatrix}$?
<u>*Hinweis:*</u> *Die Dynamikmatrix hat die Eigenschaft* $\mathbf{\Phi}^3 = \frac{1}{4}\mathbf{\Phi}$.

c) Überprüfen Sie das System (4) auf vollständige Erreichbarkeit. **2 P.**
Kann man einen Zustandsregler so entwerfen, sodass ein Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ schneller abklingt als $\mathbf{x}_k = 0.1^k \mathbf{x}_0$. Begründen Sie Ihre Antwort ohne den Zustandsregler explizit zu berechnen.

d) Zeigen Sie, dass das System (4) nicht vollständig beobachtbar ist. Zerlegen Sie das System in das beobachtbare Teilsystem der Form **3 P.**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{b}} &= \mathbf{\Phi}^{\mathrm{b}} \mathbf{x}_k^{\mathrm{b}} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{b}} u_k \\ y_k &= (\mathbf{c}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k^{\mathrm{b}} + d\, u_k \end{aligned}$$

und das nicht beobachtbare Teilsystem der Form

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{nb}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{nb}} \mathbf{x}_k^{\mathrm{nb}} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{nb}} u_k + \mathbf{H} \mathbf{x}_k^{\mathrm{b}} \ .$$

<u>*Hinweis:*</u> *Das nicht beobachtbare Teilsystem hat keinen Einfluss auf den Ausgang* y_k.

Lösung:

a) *Die Eigenwerte der Dynamikmatrix* $\mathbf{\Phi}$ *des Systems* (4) *lauten*

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2}\ .$$

Das System (4) *ist asymptotisch stabil, da die Eigenwerte betraglich kleiner als 1 sind.*

b) *Ja, man kann für das System* (4) *einen trivialen Beobachter entwerfen, da das System stabil ist.*

Die Zustandsraumdarstellung des trivialen Beobachters lautet

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \hat{\mathbf{x}}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k,\end{aligned}$$

und des Beobachtungsfehlers

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\ .$$

Der Beobachtungsfehler zum Zeitpunkt $k = 9$ *für einen Anfangsbeobachtungsfehler* $\mathbf{e}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 64 & 32 \end{bmatrix}$ *lautet*

$$\mathbf{e}_9 = \mathbf{\Phi}^9\mathbf{e}_0 = \left(\mathbf{\Phi}^3\right)^3\mathbf{e}_0 = \left(\frac{1}{4}\mathbf{\Phi}\right)^3\mathbf{e}_0 = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{4}\mathbf{\Phi}\right)\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

c) *Die Erreichbarkeitsmatrix lautet*

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Diese hat vollen Rang ($\det(\mathcal{R}) \neq 0$) *und somit ist das System* (4) *vollständig erreichbar.*

Daher können die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig platziert werden, sodass ein Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ *schneller abklingt als* $\mathbf{x}_k = 0.1^k\mathbf{x}_0$.

d) *Die Beobachtbarkeitsmatrix lautet*

$$\mathcal{O}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese hat nicht vollen Rang ($\det(\mathcal{O}) = 0$) *und somit ist das System* (4) *nicht vollständig beobachtbar.*

Die Zustände $x_{2,k}$ und $x_{3,k}$ wirken weder direkt noch indirekt über den Zustand $x_{1,k}$ auf den Ausgang y_k und sind somit nicht beobachtbar. Das beobachtbare Teilsystem lautet somit

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{b}}_{k+1} &= -\frac{1}{2}x^{\mathrm{b}}_k + u_k \\ y_k &= x^{\mathrm{b}}_k \end{aligned} \quad .$$

Das nicht beobachtbare Teilsystem lautet

$$\mathbf{x}^{\mathrm{nb}}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{nb}}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{b}}_k \ .$$

4. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist das autonome, lineare, zeitinvariante System der Form **5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & \mu \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{5a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \, . \tag{5b}$$

i. Für welchen Wert von $\mu \in \mathbb{R}$ hat das System (5) unendlich viele Ruhelagen? Ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ für diesen Wert von μ asymptotisch stabil? 2 P.|
Begründen Sie Ihre Antwort!

Für die weiteren Aufgaben gilt $\mu = 2$.

ii. Geben Sie die Lösungskurve $\mathbf{x}(t)$ des Systems (5) für einen allgemeinen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ an. 2 P.|

iii. Diskretisieren Sie das System (5) mit einer allgemeinen Abtastzeit T_a. 1 P.|

b) Ein lineares, zeitdiskretes System ist durch **5 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u_k \tag{6a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \tag{6b}$$

mit den Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ gegeben.

i. Bestimmen Sie die zugehörige z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems (6). 1.5 P.|

ii. Geben Sie die Bedingungen für a und b an, dass das System (6) phasenminimal ist. 1.5 P.|

iii. Geben Sie einen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ an, welcher für $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und $(u_k) = (0)$ zur Lösungstrajektorie 2 P.|

$$\mathbf{x}_k = \xi^k \mathbf{x}_0 \tag{7}$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$ führt. Welchen Wert hat ξ?

Lösung:

a) i. *Damit das System* (5) *unendlich viele Ruhelagen besitzt, muss für die Dynamikmatrix*

$$\det\left(\begin{bmatrix}-1 & \mu \\ -2 & -1\end{bmatrix}\right) = 0 \ .$$

gelten. Dies führt auf

$$\mu = -\frac{1}{2} \ .$$

Mit $\mu = -\frac{1}{2}$ *lauten die Eigenwerte der Dynamikmatrix*

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$$

und somit ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ *für diesen Wert von* μ *nicht asymptotisch stabil.*

ii. *Mit* $\mu = 2$ *hat die Dynamikmatrix des Systems* (5) *Jordansche Normalform. Der Formelsammlung kann die zugehörige Transitionsmatrix*

$$\mathbf{\Phi}(t) = \exp(-t)\begin{bmatrix}\cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t)\end{bmatrix}$$

entnommen werden. Die Lösungskurve des Systems (5) *für einen allgemeinen Anfangszustand* $\mathbf{x}_0$ *lautet*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0.$$

iii. *Das diskretisierte System lautet*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k,\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(T_a) = \exp(-T_a)\begin{bmatrix}\cos(2T_a) & \sin(2T_a) \\ -\sin(2T_a) & \cos(2T_a)\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

b) i. *Die zum System* (6) *zugehörige* $z-$*Übertragungsfunktion lautet*

$$G(z) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} = \frac{z(1+b) + \frac{3}{2}b - a}{(z-a)(z+\frac{1}{2})}$$

ii. *Damit das System* (6) *phasenminimal ist, müssen alle Pol- und Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.*
Somit muss

$$|a| < 1, \quad \left|\frac{a - \frac{3}{2}b}{1+b}\right| < 1$$

gelten.

iii. Um eine Lösungstrajektorie der Form

$$\mathbf{x}_k = \xi^k \mathbf{x}_0$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$ *zu erhalten, muss* $\mathbf{x}_0$ *ein Eigenvektor der Dynamikmatrix*

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

des Systems (6) sein. Der Wert von ξ *entspricht dann dem zugehörigen Eigenwert.*
Die Eigenvektoren und zugehörigen Eigenwerte lauten

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = \frac{1}{2}$$

und

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi = -\frac{1}{2} \ .$$