Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur VU Automatisierung am 05.02.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	9.5	9.5	10.5	10.5	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9.5 P.|**

   a) Für ein zeitdiskretes System sind die Differenzengleichungen **7 P.|**

$$
\begin{aligned}
x_{1,k+1} - \frac{1}{2}x_{1,k} &= u_k \ , & x_1(0) &= x_{1,0} \\
x_{2,k+1} - \frac{1}{5}x_{2,k} &= \frac{1}{3}x_{1,k} \ , & x_2(0) &= x_{2,0} \\
y_k &= x_{2,k} \ ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

   mit den Zuständen $x_{1,k}, x_{2,k}$, dem Eingang u_k und dem Ausgang y_k gegeben.

   i. Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung 1 P.|

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \ , \quad \mathbf{x}_0 \\
y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k
\end{aligned}
$$

   des Systems (1).

   ii. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des zeitdiskreten Systems (1) an. 1 P.|

   iii. Geben Sie die eingeschwungene Lösung für $(u_k) = 2(1^k) + 5(1^k)e^{-k} + 2\sin(\pi/2\, k + 10°)$ an. **Hinweis:** Vereinfachen Sie so weit wie möglich, jedoch müssen die Funktionen (z.B. Wurzel, arctan) nicht numerisch ausgewertet werden. 2 P.|

   iv. Untersuchen Sie das System auf die nachfolgenden Eigenschaften, geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antworten: 2 P.|

      A. BIBO-Stabilität

      B. Phasenminimalität

      C. Sprungfähigkeit

      D. Realisierbarkeit

   v. Geben Sie den Ausgang y_k für $k = 3$ an, wenn der Eingang $u_k = \delta_k$ ist. Dabei gilt $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und 1 P.|

$$
\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases} \ . \tag{2}
$$

   b) Prüfen Sie den Regelkreis aus Abb. 1 auf interne Stabilität und geben Sie alle dafür zu untersuchenden Übertragungsfunktionen an. **2.5 P.|**

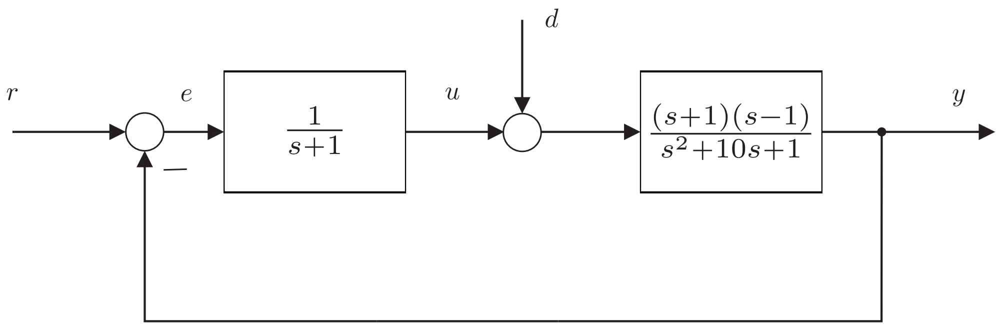

Abbildung 1: Blockschaltbild eines Regelkreises

2. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9.5 P.|**

a) Gegeben ist das autonome System **5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Lösungstrajektorie $\mathbf{x}(t)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. 1 P.|

ii. Ist das System (4) global asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

iii. Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t)$ und geben Sie die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ in Jordanscher Normalform an. 2 P.|

iv. Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{z}(t)$ des transformierten Systems für den Anfangszustand $\mathbf{z}_0$. 1 P.|

v. Schreiben Sie die Lösung des ursprünglichen Systems $\mathbf{x}(t)$ von (4) an. **Hinweis:** Es ist nicht notwendig die Matrixmultiplikation durchzuführen. 0.5 P.|

b) Eine Übertragungsfunktion ist definiert als **3 P.|**

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s(s+3)} \quad . \tag{4}$$

i. Geben Sie für die Übertragungsfunktion (5) die Minimalrealisierung in 2-ter Standardform an. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion von (5) mit einer allgemeinen Abtastzeit T_a. **Hinweis:** Vereinfachen Sie so weit wie möglich, jedoch müssen Sie die Übertragungsfunktion nicht auf gemeinsamen Nenner bringen. 2 P.|

c) Gegeben ist die Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises **1.5 P.|**

$$L(s) = \frac{s+2}{s^2 + {}^{s}\!/_{5} + 1} \tag{5}$$

in Abb. 3. Beurteilen Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand des Nyquist-Kriteriums. Skizzieren Sie dazu grob die Nyquist-Ortskurve auf einem Blatt Papier und zeichnen Sie die Punkte $\omega = \pm 0$, $\omega = \pm\infty$ sowie den Durchlaufsinn deutlich sichtbar ein!

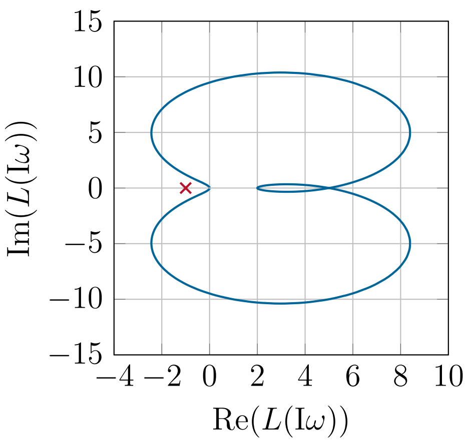

Abbildung 2: Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises (6).

3. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10.5 P.|**

a) Gegeben ist das zeitdiskrete, nichtlineare System **3 P.|**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, u_k) = \begin{bmatrix} -x_{1,k} + (x_{1,k}x_{3,k})^2 \\ -x_{1,k} + 3x_{2,k}x_{3,k}u_k + x_{3,k} + x_{2,k} \\ u_k \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y_k &= h(\mathbf{x}_k) = -\sqrt{x_{3,k}} + x_{1,k}x_{2,k} \quad . \end{aligned} \tag{6}$$

i. Berechnen Sie die Ruhelage $(\mathbf{x}_R, y_R)$ des Systems (7) für $u_R = 1$ unter der Annahme, dass die Zustandsgrößen $\mathbf{x}_k$ nur positiv sein dürfen. 1 P.|
Hinweis: Achten Sie auf den Definitionsbereich von $\mathbf{x}_k$ und darauf, wie in zeitdiskreten Systemen Ruhelagen berechnet werden.

ii. Linearisieren Sie das System um die resultierende Ruhelage $\mathbf{x}_R$ und u_R (dies funktioniert genauso wie im zeitkontinuierlichen Fall) und geben Sie das zugehörige linearisierte System an. 2 P.|

b) i. Zeigen Sie, dass die Markov-Parameter m_k des Systems **3.5 P.|** 1.5 P.|

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k\end{aligned} \tag{7}$$

invariant gegenüber regulären Zustandstransformationen $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}\mathbf{x}_k$ sind.

ii. Was lässt sich mit Hilfe der Markov-Parameter für das System (8) mit 2 P.|

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

über die vollständige Erreichbarkeit bzw. Beobachtbarkeit des Systems sagen? Beweisen und begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Beachten Sie, dass für zeitdiskrete, lineare, zeitinvariante Systeme die Markov-Parameter exakt der Impulsantwortfolge entsprechen.

c) Gegeben ist das zeitdiskrete, lineare, zeitinvariante System **4 P.|**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k \\ \mathbf{\Phi} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .\end{aligned} \tag{8}$$

i. Es soll für (9) ein vollständiger Luenberger-Beobachter so entworfen werden, dass sämtliche Eigenwerte der Beobachter-Fehlerdynamik bei $1/2$ zu liegen kommen. Geben Sie die Differenzengleichungen des Beobachters vollständig an! 2 P.|

ii. Zusätzlich wird ein Zustandsregler basierend auf dem geschätzten Zustand $\hat{\mathbf{x}}_k$ entworfen (Sie müssen diesen Entwurf nicht durchführen). 2 P.|
Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des gesamten Systems bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter. Zeichnen Sie in dieses Blockschaltbild die Stellgröße ein und markieren Sie jene Punkte mit D/A und A/D, an denen sich die Digital/Analog- und Analog/Digital-Wandler befinden, wenn die Strecke zeitkontinuierlich ist.

4. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10.5 P.|**

2.5 P.|

a) i. Zeichnen Sie das Blockschaltbild einer Steuerung mit Störgrößenaufschaltung. Kennzeichnen Sie deutlich die Führungs-, Stör-, Ausgangs- und Stellgröße. 1.5 P.|

ii. Geben Sie die Störübertragungsfunktion zum Blockschaltbild aus Aufgabe 4a)i. an. 0.5 P.|

iii. Welche Voraussetzung muss die Strecke erfüllen, damit Sie eine Steuerung mit Störgrößenaufschaltung verwenden dürfen? 0.5 P.|

b) Gegeben ist eine Strecke mit der Übertragungsfunktion **5 P.|**

$$G(s) = 10\frac{(s+1)}{s^2} \quad .$$

Entwerfen Sie mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens einen Regler so, dass Folgendes gilt: bleibende Regelabweichung $e_\infty|_{\sigma(t)} = 0$, Anstiegszeit $t_r = 1.5$ s, Überschwingen ü = 5 %.

i. Die Anforderungen können mit einer Reglerübertragungsfunktion erster Ordnung erfüllt werden. Geben Sie diese Reglerübertragungsfunktion $R(s)$ an und schreiben Sie, um welchen Regler es sich hierbei handelt. Begründen Sie Ihre Wahl! 2 P.|

ii. Beschreiben Sie im Detail, wie Sie diesen Regler entwerfen. Sie müssen die Reglerparameter nicht explizit numerisch ausrechnen, aber beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie der Entwurf erfolgt und welche Gleichungen dabei zu lösen sind. 3 P.|

c) Skizzieren Sie die Sprungantworten der Strecken mit den Übertragungsfunktionen **3 P.|**

$$\begin{aligned}
G_1(s) &= 10\frac{(s-1)}{(s+1)^2} \\
G_2(s) &= \mathrm{e}^{-s} \\
G_3(s) &= G_1(s) \cdot G_2(s) \\
G_4(s) &= G_1(s) + G_2(s) \quad .
\end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie den Wert der Sprungantwort von $G_1(s)$ an der Stelle $t \to +0$, $t \to \infty$ und deren Steigung für $t \to +0$.