Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 05.02.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	9.5	9.5	10.5	10.5	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9.5 P.|**

   a) Für ein zeitdiskretes System sind die Differenzengleichungen **7 P.|**

$$
\begin{aligned}
x_{1,k+1} - \frac{1}{2}x_{1,k} &= u_k \ , & x_1(0) &= x_{1,0} \\
x_{2,k+1} - \frac{1}{5}x_{2,k} &= \frac{1}{3}x_{1,k} \ , & x_2(0) &= x_{2,0} \\
y_k &= x_{2,k} \ ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   mit den Zuständen $x_{1,k}, x_{2,k}$, dem Eingang u_k und dem Ausgang y_k gegeben.

   i. Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung 1 P.|

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \ , \quad \mathbf{x}_0 \\
y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k
\end{aligned}
$$

   des Systems (1).

   ii. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des zeitdiskreten Systems (1) an. 1 P.|

   iii. Geben Sie die eingeschwungene Lösung für $(u_k) = 2(1^k) + 5(1^k)e^{-k} + 2\sin(\pi/2\, k + 10°)$ an. **Hinweis:** Vereinfachen Sie so weit wie möglich, jedoch müssen die Funktionen (z.B. Wurzel, arctan) nicht numerisch ausgewertet werden. 2 P.|

   iv. Untersuchen Sie das System auf die nachfolgenden Eigenschaften, geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antworten: 2 P.|

      A. BIBO-Stabilität
      B. Phasenminimalität
      C. Sprungfähigkeit
      D. Realisierbarkeit

   v. Geben Sie den Ausgang y_k für $k = 3$ an, wenn der Eingang $u_k = \delta_k$ ist. Dabei gilt $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und 1 P.|

$$
\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k > 0 \end{cases} \ . \tag{2}
$$

   b) Prüfen Sie den Regelkreis aus Abb. 1 auf interne Stabilität und geben Sie alle dafür zu untersuchenden Übertragungsfunktionen an. **2.5 P.|**

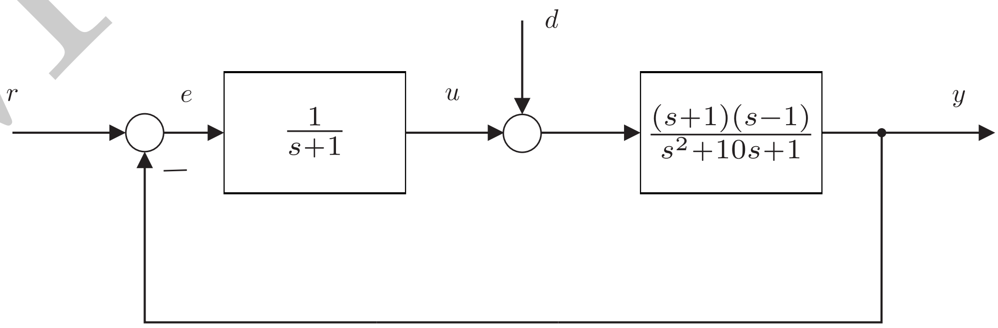

Abbildung 1: Blockschaltbild eines Regelkreises

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k\,, \quad \mathbf{x}_0$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$$

ii. $G(z) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{b} + d = \frac{1/3}{(z-1/2)(z-1/5)}$

iii.

$$(y_k) = 2\left(\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}G(z)\right) + 2\left|G(e^{\mathrm{I}\frac{\pi}{2}})\right| \sin\left(\frac{\pi}{2}k + 10\frac{\pi}{180} + \arg(G(e^{\mathrm{I}\frac{\pi}{2}}))\right)$$
$$(y_k) = \frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{13}} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + 10\frac{\pi}{180} + \arctan(2) + \arctan(5)\right)$$

iv. A. *BIBO-stabil: Ja, weil Polstellen* $|z_i| < 1$

B. *Phasenminimal: Ja, weil Polstellen* $|z_i| < 1$ *und Nullstellen* $|n_i| < 1$

C. *Sprungfähig: Nein, weil* $\lim_{z\to\infty} G(z) = 0$

D. *Realisierbar: Ja, weil* $\lim_{z\to\infty} |G(z)| < \infty$

v.

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{\Phi}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}^2\mathbf{\Gamma}u_0 + \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}u_1 + \mathbf{\Gamma}u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{30} \end{bmatrix}$$
$$y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_3 = \frac{7}{30}$$

b)

$$T_{r,y} = \frac{s-1}{s(s+11)} \tag{3a}$$
$$T_{d,y} = \frac{(s-1)(s+1)}{s(s+11)} \tag{3b}$$
$$T_{r,u} = \frac{s^2+10s+1}{s(s+1)(s+11)} \tag{3c}$$
$$T_{d,u} = -T_{r,y} \tag{3d}$$

Der Regelkreis aus Abb. 1 ist nicht intern stabil, da sämtliche Übertragungsfunktionen (3) *BIBO-stabil sein müssten bzw. folgende Bedingungen erfüllt sein müssten*

(A) $1 + \frac{1}{s+1}\frac{(s+1)(s-1)}{s^2+10s+1} = \frac{s(s+11)}{s^2+10s+1} \neq 0$ *für* $\mathrm{Re}(s) \geq 0 \rightarrow$ ***nicht erfüllt***

(B) im Produkt $R(s)G(s)$ *treten keine Pol/Nullstellenkürzungen für Pole oder Nullstellen* s_i *mit* $\mathrm{Re}(s_i) \geq 0$ *auf* $\rightarrow$ ***erfüllt***

2. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9.5 P.|**

   a) Gegeben ist das autonome System **5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

   Bestimmen Sie die Lösungstrajektorie $\mathbf{x}(t)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

   i. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. 1 P.|

   ii. Ist das System (4) global asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

   iii. Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t)$ und geben Sie die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ in Jordanscher Normalform an. 2 P.|

   iv. Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{z}(t)$ des transformierten Systems für den Anfangszustand $\mathbf{z}_0$. 1 P.|

   v. Schreiben Sie die Lösung des ursprünglichen Systems $\mathbf{x}(t)$ von (4) an. **Hinweis:** Es ist nicht notwendig die Matrixmultiplikation durchzuführen. 0.5 P.|

   b) Eine Übertragungsfunktion ist definiert als **3 P.|**

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s(s+3)} \quad . \tag{5}$$

   i. Geben Sie für die Übertragungsfunktion (5) die Minimalrealisierung in 2-ter Standardform an. 1 P.|

   ii. Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion von (5) mit einer allgemeinen Abtastzeit T_a. **Hinweis:** Vereinfachen Sie so weit wie möglich, jedoch müssen Sie die Übertragungsfunktion nicht auf gemeinsamen Nenner bringen. 2 P.|

   c) Gegeben ist die Nyquist-Ortskurve der Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises **1.5 P.|**

$$L(s) = \frac{s+2}{s^2 + s/5 + 1} \tag{6}$$

   in Abb. 3. Beurteilen Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises anhand des Nyquist-Kriteriums. Skizzieren Sie dazu grob die Nyquist-Ortskurve auf einem Blatt Papier und zeichnen Sie die Punkte $\omega = \pm 0$, $\omega = \pm\infty$ sowie den Durchlaufsinn deutlich sichtbar ein!

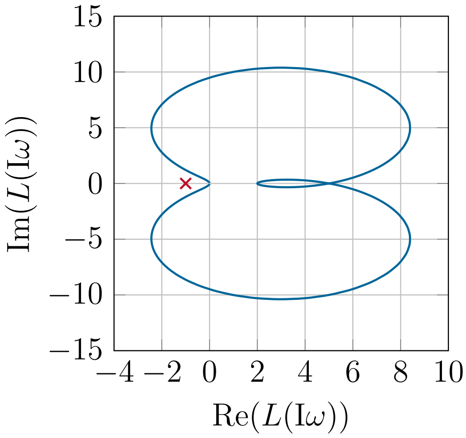

Abbildung 2: Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises (6).

Lösung:

a) *i.* $\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}) = (\lambda+1)(\lambda^2+4), \qquad \lambda_1 = -1, \qquad \lambda_{2,3} = \pm \mathrm{I}2$

ii. *Global asymptotisch stabil: Nein, weil* $\mathrm{Re}(\lambda_{2,3}) = 0$

iii. $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}(\mathbf{v}_2) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

iv. $\mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{z}_0, \qquad \tilde{\mathbf{\Phi}} = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \sin(2t) \\ 0 & -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$

v. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0$

b) *i.*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}u\,, \quad \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + d \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) \\ G(z) &= \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\frac{T_a}{z-1} + \frac{8}{9}\frac{z-1}{z-e^{-3T_a}} \end{aligned}$$

c) *Bedingung:*

$\Delta \arg(1+L(\mathrm{I}\omega)) = \Big(\max\big(\mathrm{grad}(z_L), \mathrm{grad}(n_L)\big) - N_-(n_L) + N_+(n_L)\Big)\pi = 0$

Grafisch:

$\Delta \arg(1+L(\mathrm{I}\omega)) = 0$

$\rightarrow$ *geschlossener Kreis BIBO-stabil*

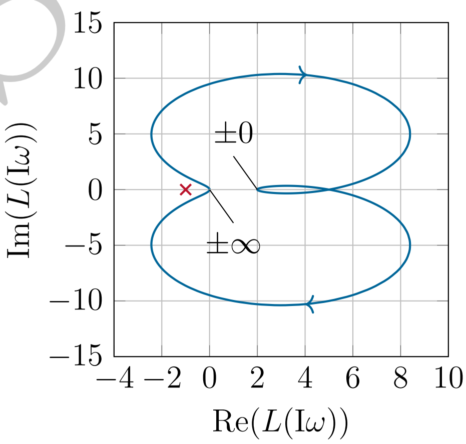

Abbildung 3: Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises (6).

3. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10.5 P.|**

a) Gegeben ist das zeitdiskrete, nichtlineare System **3 P.|**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, u_k) = \begin{bmatrix} -x_{1,k} + (x_{1,k}x_{3,k})^2 \\ -x_{1,k} + 3x_{2,k}x_{3,k}u_k + x_{3,k} + x_{2,k} \\ u_k \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y_k &= h(\mathbf{x}_k) = -\sqrt{x_{3,k}} + x_{1,k}x_{2,k} \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

i. Berechnen Sie die Ruhelage $(\mathbf{x}_R, y_R)$ des Systems (7) für $u_R = 1$ unter der Annahme, dass die Zustandsgrößen $\mathbf{x}_k$ nur positiv sein dürfen. 1 P.|
Hinweis: Achten Sie auf den Definitionsbereich von $\mathbf{x}_k$ und darauf, wie in zeitdiskreten Systemen Ruhelagen berechnet werden.

ii. Linearisieren Sie das System um die resultierende Ruhelage $\mathbf{x}_R$ und u_R (dies funktioniert genauso wie im zeitkontinuierlichen Fall) und geben Sie das zugehörige linearisierte System an. 2 P.|

b) i. Zeigen Sie, dass die Markov-Parameter m_k des Systems **3.5 P.|** 1.5 P.|

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k \end{aligned} \tag{8}$$

invariant gegenüber regulären Zustandstransformationen $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}\mathbf{x}_k$ sind.

ii. Was lässt sich mit Hilfe der Markov-Parameter für das System (8) mit 2 P.|

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

über die vollständige Erreichbarkeit bzw. Beobachtbarkeit des Systems sagen? Beweisen und begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Beachten Sie, dass für zeitdiskrete, lineare, zeitinvariante Systeme die Markov-Parameter exakt der Impulsantwortfolge entsprechen.

c) Gegeben ist das zeitdiskrete, lineare, zeitinvariante System **4 P.|**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k \\ \mathbf{\Phi} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

i. Es soll für (9) ein vollständiger Luenberger-Beobachter so entworfen werden, dass sämtliche Eigenwerte der Beobachter-Fehlerdynamik bei $1/2$ zu liegen kommen. Geben Sie die Differenzengleichungen des Beobachters vollständig an! 2 P.|

ii. Zusätzlich wird ein Zustandsregler basierend auf dem geschätzten Zustand $\hat{\mathbf{x}}_k$ entworfen (Sie müssen diesen Entwurf nicht durchführen). 2 P.|
Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des gesamten Systems bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter. Zeichnen Sie in dieses Blockschaltbild die Stellgröße ein und markieren Sie jene Punkte mit D/A und A/D, an denen sich die Digital/Analog- und Analog/Digital-Wandler befinden, wenn die Strecke zeitkontinuierlich ist.

Lösung:

a) i. *Für $u_R = 1$ lautet die Ruhelage*

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$y_R = -1/3 \quad .$$

1 P.|

ii. *Mit $\Delta\mathbf{x}_k := \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_R$, $\Delta u_k := u_k - u_R$, $\Delta y_k := y_k - y_R$ lautet das linearisierte System*

$$\Delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\Delta u_k \ , \quad \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R$$
$$\Delta y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}_k + d\Delta u_k \quad ,$$

wobei

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}, \ d = 0 \quad .$$

2 P.|

b) i. *Durch Einsetzen in das transformierte System findet man*

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{T}\mathbf{\Phi}\mathbf{T}^{-1}, \ \tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{T}\mathbf{\Gamma}, \ \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{-1} \quad ,$$

womit sich

$$\tilde{m}_k = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{\Phi}}^{k-1}\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{k-1}\mathbf{\Gamma} = m_k$$

ergibt. **1.5 P.|**

ii. *Für das angegebene System lauten die relevanten Markov-Parameter*

$$m_1 = 2, \ m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 0 \quad .$$

Damit ergibt sich die Hankelmatrix $\mathbf{H}_d[1, n-1]$ zu

$$\mathbf{H}_d[1, n-1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Nachdem diese Matrix offensichtlich nicht vollen Rang besitzt, gilt für das System laut Satz 7.11 im Skriptum die logische Negation von (vollständig erreichbar $\wedge$ vollständig beobachtbar) und somit eine der folgenden Aussagen:

- *nicht vollständig erreichbar $\wedge$ vollständig beobachtbar*
- *vollständig erreichbar $\wedge$ nicht vollständig beobachtbar*
- *nicht vollständig erreichbar $\wedge$ nicht vollständig beobachtbar.*

2 P.|

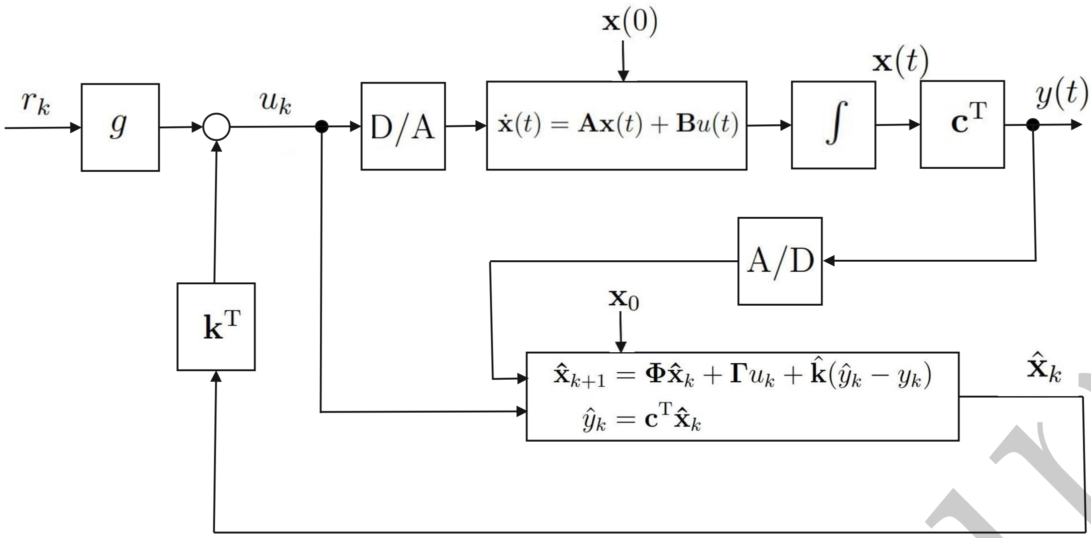

Abbildung 4: Blockschaltbild der Kombination aus Zustandsbeobachter und -regler aus Aufgabe 3cii).

c)   *i. Mit dem gewünschten charakteristischen Polynom* $\hat{p}_{g,soll}(z) = (z - 1/2)^2$ *der Fehlerdynamikmatrix* $\mathbf{\Phi}_e$ *beträgt der Rückführungsvektor* $\hat{\mathbf{k}}$

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -9/4 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

womit die Differenzengleichungen des Beobachters lauten:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k) \ , \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}_k \quad . \end{aligned}$$

2 P.|

ii. Das Blockschaltbild ist Abbildung 4 zu entnehmen. **2 P.|**

4. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10.5 P.|**

2.5 P.|

a) i. Zeichnen Sie das Blockschaltbild einer Steuerung mit Störgrößenaufschaltung. Kennzeichnen Sie deutlich die Führungs-, Stör-, Ausgangs- und Stellgröße. 1.5 P.|

ii. Geben Sie die Störübertragungsfunktion zum Blockschaltbild aus Aufgabe 4a)i. an. 0.5 P.|

iii. Welche Voraussetzung muss die Strecke erfüllen, damit Sie eine Steuerung mit Störgrößenaufschaltung verwenden dürfen? 0.5 P.|

b) Gegeben ist eine Strecke mit der Übertragungsfunktion **5 P.|**

$$G(s) = 10\frac{(s+1)}{s^2} \quad .$$

Entwerfen Sie mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens einen Regler so, dass Folgendes gilt: bleibende Regelabweichung $e_\infty|_{\sigma(t)} = 0$, Anstiegszeit $t_r = 1.5$ s, Überschwingen ü = 5 %.

i. Die Anforderungen können mit einer Reglerübertragungsfunktion erster Ordnung erfüllt werden. Geben Sie diese Reglerübertragungsfunktion $R(s)$ an und schreiben Sie, um welchen Regler es sich hierbei handelt. Begründen Sie Ihre Wahl! 2 P.|

ii. Beschreiben Sie im Detail, wie Sie diesen Regler entwerfen. Sie müssen die Reglerparameter nicht explizit numerisch ausrechnen, aber beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie der Entwurf erfolgt und welche Gleichungen dabei zu lösen sind. 3 P.|

c) Skizzieren Sie die Sprungantworten der Strecken mit den Übertragungsfunktionen **3 P.|**

$$\begin{aligned} G_1(s) &= 10\frac{(s-1)}{(s+1)^2} \\ G_2(s) &= \mathrm{e}^{-s} \\ G_3(s) &= G_1(s) \cdot G_2(s) \\ G_4(s) &= G_1(s) + G_2(s) \quad . \end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie den Wert der Sprungantwort von $G_1(s)$ an der Stelle $t \to +0$, $t \to \infty$ und deren Steigung für $t \to +0$.

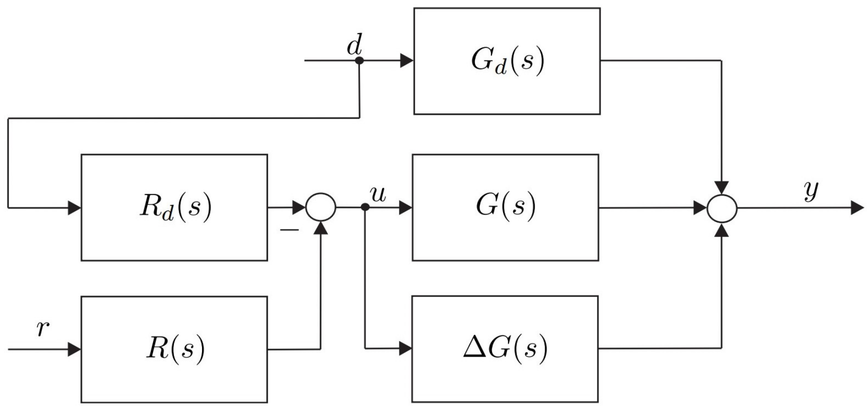

Abbildung 5: Blockschaltbild einer Steuerung mit Störgrößenaufschaltung.

Lösung:

a) i. *Das Blockschaltbild ist in Abbildung 5 zu sehen.* **1.5 P.|**

ii. *Die Störübertragungsfunktion lautet*

$$T_{d,y} = G_d(s) - G(s)R_d(s) \quad .$$

0.5 P.|

iii. *Die Strecken mssen stabil sein (das heißt, dass $G_d(s)$, $G(s)$, $R_d(s)$, $R(s)$ BIBO-stabil sein müssen.)* **0.5 P.|**

b) i. *Die naheliegendste Wahl zur Lösung der Regelaufgabe ist ein Lead-Glied, dessen Übertragungsfunktion durch*

$$R(s) = V\frac{1+sT}{1+s\eta T},\ 0 < \eta < 1$$

dargestellt wird. Die wesentlichen drei Gründe für diese Wahl sind:

- *Die Phase der Strecke bei $\omega = \omega_c = 1$ muss um 20 Grad angehoben werden, da die gewünschte Phasenreserve $\Phi[°]$ 65 Grad beträgt und $arg(G(I\omega_c)) = -135°$ gilt.*
- *Ein PI-Regler ist keine Option, da jener die Phase einer Strecke nur senken, nicht anheben kann. Zudem besitzt die Strecke bereits einen Doppelintegrator und ein zusätzlicher Integralteil würde die Voraussetzung $\rho \in \{0,1,2\}$ von Satz 4.6 im Skriptum verletzen.*
- *Da $e_\infty|_{\sigma(t)} = 0$ gilt, kann der Verstärkungsfaktor V frei gewählt werden, wodurch kein Lead-Lag-Reglerentwurf vonnöten ist.*

2 P.|

ii. *Schritt 1: Die Durchtrittsfrequenz ω_c und die Phasenreserve Φ errechnen sich über die empirischen Relationen $\omega_c t_r = 1.5$ und $\Phi[°]+\ddot{u}[\%] = 70$ jeweils zu 1 und 65°.*
Schritt 2: Die maximale Phasenanhebung wird auf ω_c gelegt und soll dort 20 Grad betragen:

$$\eta = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{20°}{2}\right)\right)^2 \quad .$$

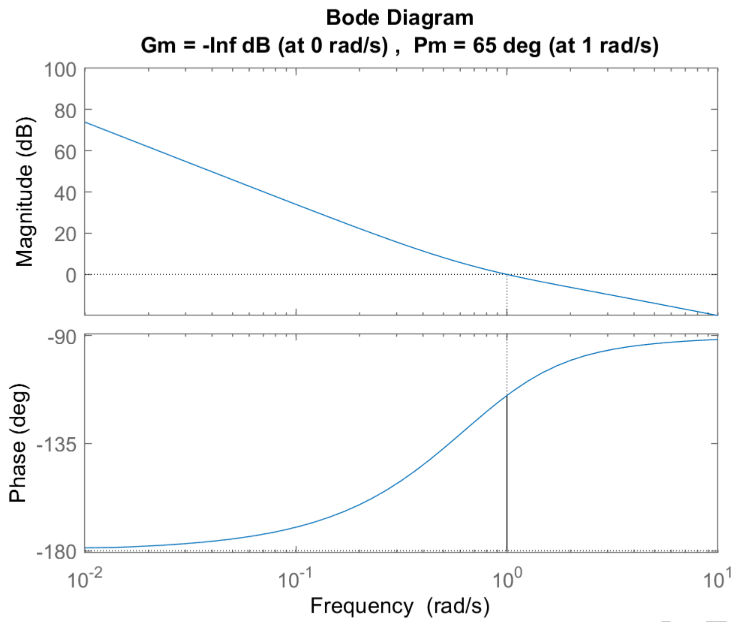

Abbildung 6: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises aus Aufgabe 4b).

Schritt 3: Mit $\omega_{max} = \omega_c$ ergibt sich die Zeitkonstante zu

$$T = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \quad .$$

Schritt 4: Die bisher bekannten Teile des Reglers zusammen mit der Strecke ergeben die Übertragungsfunktion

$$L_1(s) = G(s) \cdot \frac{1+sT}{1+s\eta T} \quad .$$

Mithilfe von V bewirkt man nun, dass der Betrag des offenen Regelkreises bei ω_c eins beträgt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{|L_1(I\omega_c)|} \\ &= \frac{1+\eta^2T^2}{10\sqrt{(1-T+\eta T(1+T))^2+(1+T-\eta T(1-T))^2}} \\ &= 1/20\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{\eta^2T^2+1}}{\sqrt{T^2+1}} \quad . \end{aligned}$$

3 P.|

Ein Bode-Diagramm des offenen Regelkreises $L(s)$ ist Abbildung 6 zu entnehmen.

c) *Anwendung des Anfangs- und Endwertsatzes liefert für $G_1(s) = \frac{10(s-1)}{(s+1)^2}$*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+0} h_1(t) = 0 \\ &\lim_{t\to\infty} h_1(t) = -10 \\ &\lim_{t\to+0} \frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = 10 \quad . \end{aligned}$$

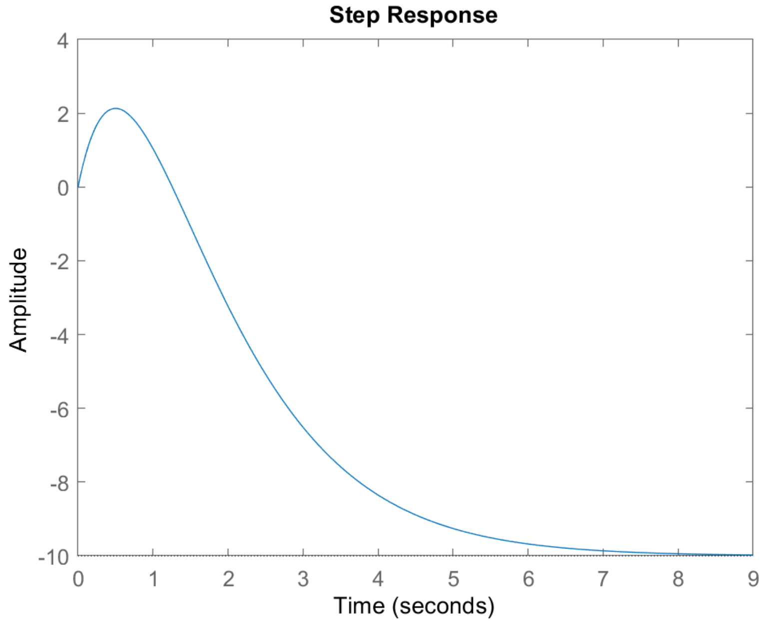

Abbildung 7: Sprungantwort von $G_1(s)$.

Da $G_2(s)$ ein Totzeit-Glied mit $T_t = 1$ ist und $G_3(s)$ bzw. $G_4(s)$ jeweils das Produkt (Faltung im t-Bereich) bzw. die Superposition der beiden Übertragungsfunktionen sind, lassen sich die Sprungantworten aus diesen Informationen skizzieren. Die Sprungantworten sind in Abbildungen 7, 8, 9 und 10 ersichtlich. **3 P.**

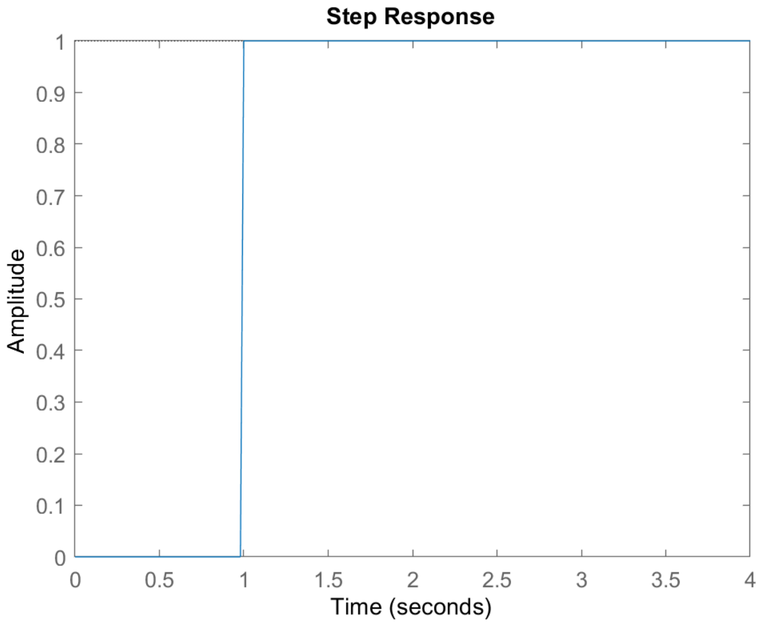

Abbildung 8: Sprungantwort von $G_2(s)$.

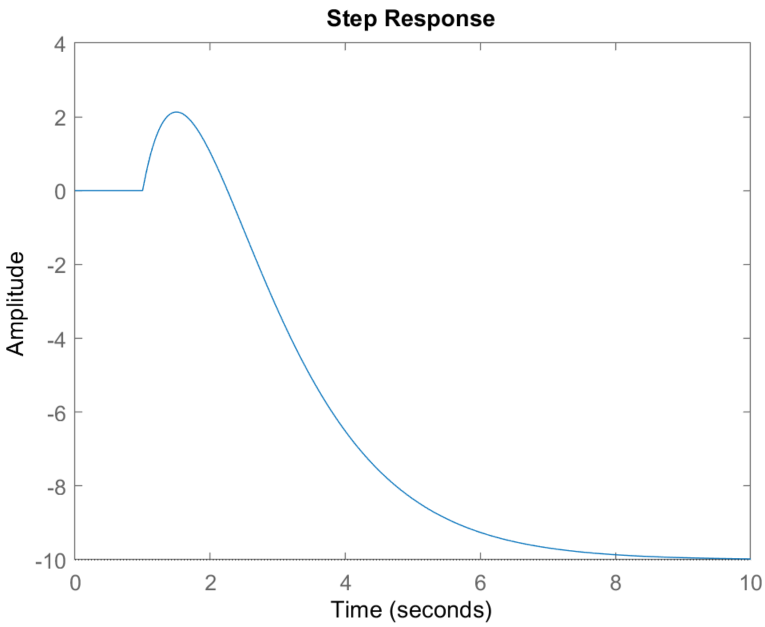

Abbildung 9: Sprungantwort von $G_3(s)$.

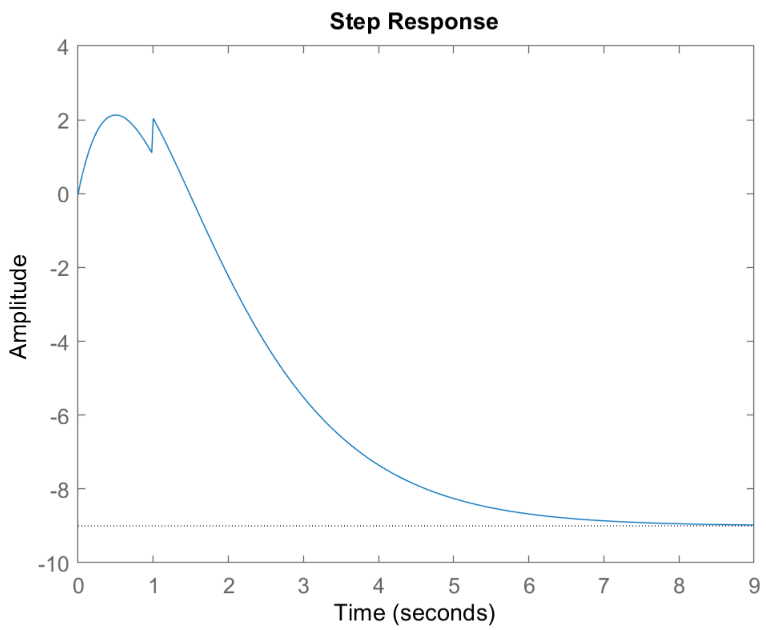

Abbildung 10: Sprungantwort von $G_4(s)$.