Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 26.03.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

   a) Gegeben ist das nichtlineare, zeitkontinuierliche System aus Abb. 1 in Form eines Strukturschaltbildes. **7.5 P.|**

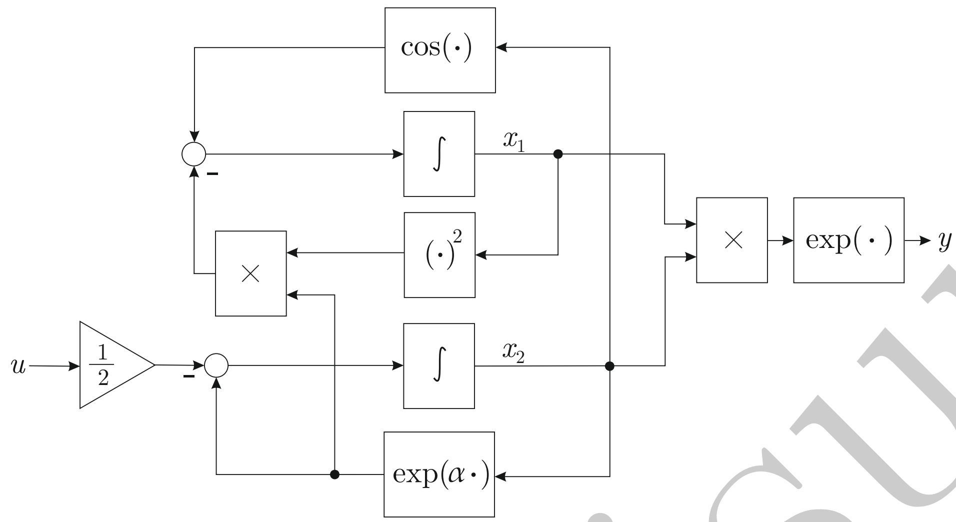

Abbildung 1: Strukturschaltbild des nichtlinearen Systems

      i. Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung 1.5 P.|

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= h(\mathbf{x}, u) \end{aligned} \tag{1}$$

      des Systems aus Abb. 1 mit den Zuständen $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1 \quad x_2]$, dem Eingang $u \in \mathbb{R}$ und der Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$.

      ii. Bestimmen Sie die Ruhelage(n) $(\mathbf{x}_R, u_R)$ des Systems (1) für $u_R = 2$. 2 P.|

      iii. Linearisieren Sie das System (1) um die ermittelte(n) Ruhelage(n) und stellen Sie es wie folgt dar 2.5 P.|

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u, \qquad \Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ \Delta y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u. \end{aligned} \tag{2}$$

      iv. Wie muss α jeweils gewählt werden, damit die Ruhelage(n) asymptotisch stabil ist (sind). 1.5 P.|

   b) Betrachtet wird ein lineares, zeitdiskretes System mit der Systemordnung $n = 2$ **2.5 P.|**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ 0 & \Phi_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} u_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \begin{bmatrix} c_1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \end{aligned} \tag{3}$$

      i. Geben Sie ein Beispiel für $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \Gamma_1, \Gamma_2$ und c_1 an, sodass für das System (3) folgende Eigenschaften gelten: 2.0 P.|
         - global asymptotisch stabil
         - vollständig erreichbar
         - vollständig beobachtbar

         Begründen Sie ihre Antworten!

      ii. Ist das System (3) dann auch vollständig steuerbar? Begründen Sie Ihre Antwort! 0.5 P.|

Lösung:

a) *i.*

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(x_2) - x_1^2\exp(\alpha x_2)\\ \exp(\alpha x_2) - \frac{u}{2}\end{bmatrix}$$
$$y = \exp(x_1 x_2)$$

ii. *Das System hat zwei Ruhelagen:*

$$\mathbf{x}_{R,1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{R,2} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

iii.

Ruhelage $\mathbf{x}_{R,1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-2 & -\alpha\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}, \quad d = 0$$

Ruhelage $\mathbf{x}_{R,2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & -\alpha\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}, \quad d = 0$$

iv. $\mathbf{A}$ *ist eine obere Dreiecksmatrix und somit entsprechen die Diagonalelemente den Eigenwerten der Matrix.*
Ruhelage $\mathbf{x}_{R,1}$*:* $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \alpha$
Ruhelage $\mathbf{x}_{R,2}$*:* $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \alpha$
Die erste Ruhelage ist für $\alpha < 0$ *asymptotisch stabil. Die zweite Ruhelage ist aufgrund des positiven Eigenwerts* λ_1 *unabhängig von* α *nicht asymptotisch stabil.*

b) *i.* *Ein Beispiel für ein zeitdiskretes System, das die geforderten Eigenschaften erfüllt ist*

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

- *Die Eigenwerte von* $\mathbf{\Phi}$ *lauten* $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ *und* $\lambda_2 = \frac{1}{4}$*. Es gilt* $|\lambda_1| < 1$ *und* $|\lambda_2| < 1$ *und somit liegt asymptotische Stabilität vor.*
- *Die Erreichbarkeitsmatrix* $\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ *hat vollen Rang und somit ist das System vollständig erreichbar.*
- *Die Beobachtbarkeitsmatrix* $\mathcal{O}(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}, \mathbf{\Phi}) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}$ *hat vollen Rang und somit ist das System vollständig beobachtbar.*

ii. *Das System ist auch vollständig steuerbar, denn es gilt: vollständige Erreichbarkeit* $\implies$ *vollständige Steuerbarkeit (gilt für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Systeme, die Umkehrung gilt für zeitdiskrete Systeme nur wenn* $\mathbf{\Phi}$ *regulär ist).*

2. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.**

   a) Gegeben sind die vier Sprungantworten $h_1(t), \dots, h_4(t)$ in Abbildung 2. **4 P.**

      i. Schreiben Sie die Übertragungsfunktionen $G_1(s), \dots, G_4(s)$ zu den Sprungantworten $h_1(t), \dots, h_4(t)$ in allgemeiner Form an, d. h. verwenden Sie Variablen für die Verstärkungen und Zeitkonstanten. 2 P.

      ii. Benennen Sie die vier regelungstechnischen Übertragungsglieder $G_1(s), \dots, G_4(s)$. 1 P.

      iii. Bestimmen Sie die Parameter für die Übertragungsfunktionen $G_1(s), \dots, G_4(s)$ aus Abbildung 2. 1 P.

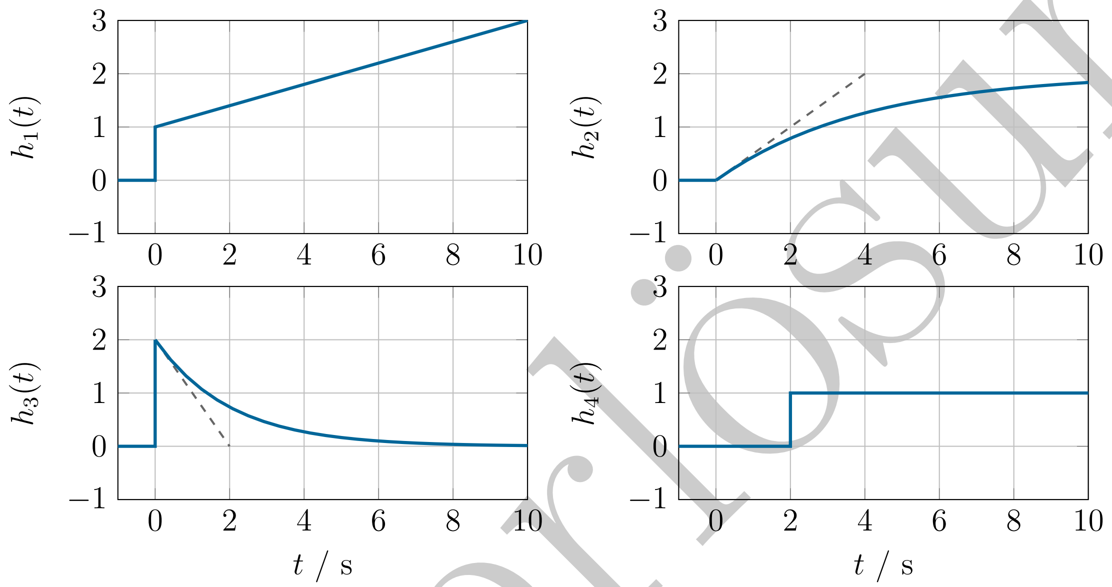

Abbildung 2: Sprungantworten $h_1(t), \dots, h_4(t)$ der Glieder $G_1(s), \dots, G_4(s)$.

   b) Gegeben ist das Blockschaltbild in Abbildung 3 mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$. **6 P.**

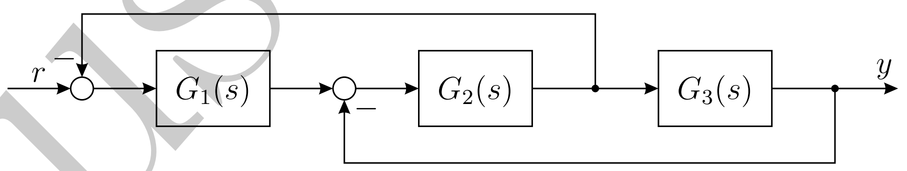

Abbildung 3: Blockschaltbild.

      i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{r,y}(s) = \dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)}$. 2.5 P.

      ii. Es sei 3.5 P.

$$G_1(s) = \frac{V_1}{s} \qquad G_2(s) = \frac{V_2}{1 + 2\xi sT + (sT)^2} \qquad G_3(s) = V_3$$

      mit $V_1, V_2, V_3, T > 0$. Bestimmen Sie den zulässigen Bereich von ξ, damit $T_{r,y}(s)$ BIBO-stabil ist.

Lösung:

a) *i.*

$$G_1(s) = V_{1,P} + \frac{V_{1,I}}{s}\ , \qquad G_2(s) = \frac{V_2}{1+sT_2}\ ,$$
$$G_3(s) = \frac{sV_3}{1+sT_3}\ , \qquad G_4(s) = V_4 \mathrm{e}^{-sT_4}$$

ii.

$G_1(s)$: *PI-Glied* , $G_2(s)$: *PT_1-Glied* ,
$G_3(s)$: *DT_1-Glied* , $G_4(s)$: *Totzeitglied*

iii.

$$G_1(s):\ V_{1,P} = 1\ ,\quad V_{1,I} = \frac{1}{5} \qquad G_2(s):\ V_2 = 2\ ,\quad T_2 = 4$$
$$G_3(s):\ V_3 = 4\ ,\quad T_3 = 2 \qquad G_4(s):\ V_4 = 1\ ,\quad T_4 = 2$$

b) *i.*

$$T_{r,y}(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3} \tag{4}$$

ii. Das Nennerpolynom von $T_{r,y}(s)$ in (4) lautet

$$p(s) = T^2\, s^3 + 2\xi T\, s^2 + (1 + V_2 V_3)\, s + V_1 V_2\ .$$

Die Stabilität der Übertragungsfunktion dritter Ordnung muss mithilfe des Verfahrens von Routh-Hurwitz geprüft werden. Die Pivot-Spalte führt zu den Bedingungen

$$T^2 > 0 \tag{5a}$$
$$2\xi T > 0 \tag{5b}$$
$$\frac{2\xi T(1 + V_2 V_3) - T^2 V_1 V_2}{2\xi T} > 0 \tag{5c}$$
$$V_1 V_2 > 0 \tag{5d}$$

Mit der Angabe $V_1, V_2, V_3, T > 0$ folgt die Bedingung für BIBO-Stabilität zu

$$\xi > \frac{V_1 V_2 T}{2(1 + V_2 V_3)}\ .$$

3. Gegeben ist das autonome System **10 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{6}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c & -1 \\ 2 + c + \frac{1}{4}c^2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Die Aufgaben a) und b) können unabhängig von c) bis f) gelöst werden.

a) Können Sie $c \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass das System (6) unendlich viele Ruhelagen besitzt? Begründen Sie ausführlich Ihre Antwort. 1.5 P.|

b) Bestimmen Sie den zulässigen Bereich von $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des Systems (6) asymptotisch stabil ist. 2.5 P.|

Für die weiteren Aufgaben gilt $c = -2$.

c) Berechnen Sie den Zeitverlauf von $\mathbf{x}(t)$ für einen allgemeinen Anfangswert $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. 2 P.|

d) Berechnen Sie den Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, wenn der Zustand $\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3\pi} \\ -2\mathrm{e}^{-3\pi} \end{bmatrix}$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{3\pi}{2}$ bekannt ist. 2 P.|

e) Bestimmen Sie das Abtastsystem zu (6) mit der Abtastzeit $T_a = \pi$. 1 P.|

f) Berechnen Sie den Verlauf des diskreten Zustandes $\mathbf{x}_k$ für $k = 1, 2, \ldots$ für einen allgemeinen Anfangswert $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. 1 P.|

Lösung:

a) *Das autonome System besitzt unendlich viele Ruhelagen, wenn gilt* $\det(\mathbf{A}) = 0$, *d. h.*

$$\det(\mathbf{A}) = c^2 - 4c + 8 \stackrel{!}{=} 0 \tag{7}$$

Die Lösungen zu (7) sind $c_{1,2} = 2 \pm 2I \notin \mathbb{R}$. *Es gibt daher kein* $c \in \mathbb{R}$, *welches zu unendlich vielen Ruhelagen führt.*

b) *Die Eigenwerte des autonomen Systems sind die Lösungen der Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 + (2-c)\lambda + \left(2 - c + \frac{1}{4}c^2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

und lauten

$$\lambda_{1,2} = -1 + \frac{c}{2} \pm I \ .$$

Asymptotische Stabilität liegt für $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ *vor, woraus die Bedingung*

$$c < 2$$

folgt.

c) *Die Dynamikmatrix*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

liegt bereits in Jordanscher Normalform mit $\alpha_1 = -2$ *und* $\beta_1 = -1$ *vor. Es folgt der Zeitverlauf von* $\mathbf{x}(t)$ *zu*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{\Phi}(t) &= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t}\cos(t) & -\mathrm{e}^{-2t}\sin(t) \\ \mathrm{e}^{-2t}\sin(t) & \mathrm{e}^{-2t}\cos(t) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

d) *Aus*

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{x}_0$$

folgt

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}^{-1}(t_1)\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

e) *Das Abtastsystem lautet*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k \\ \mathbf{\Phi} &= \exp(\mathbf{A}T_a) = \mathbf{\Phi}(T_a) = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-2\pi} & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-2\pi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

f) *Der Verlauf des diskreten Zustandes* $\mathbf{x}_k$ *lautet*

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}^k\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} (-1)^k\mathrm{e}^{-2k\pi}x_{0,1} \\ (-1)^k\mathrm{e}^{-2k\pi}x_{0,2} \end{bmatrix} = (-1)^k\mathrm{e}^{-2k\pi}\mathbf{x}_0$$

4. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.**|

   a) Ein lineares, zeitdiskretes System reagiert auf die Eingangsfolge $(u_k) = (1, 0, 0, ...)$ mit der Ausgangsfolge $(y_k) = (0, 1, \xi, 1, 0, 0, ...)$, mit dem reellen Parameter $\xi < \infty$. **6.5 P.**|

      i. Wie lautet die Impulsantwort (g_k) des Systems? 0.5 P.|

      ii. Ist das System BIBO-stabil? Ist das System sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antworten! 1.0 P.|

      iii. Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$. 1.0 P.|

      iv. Wie muss der Parameter ξ gewählt werden, damit man für die Eingangsfolge $(u_k) = \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}k + \frac{\pi}{8})$ die Ausgangsfolge $(y_k) = (0, 0, ...)$ erhält? 2.0 P.|

      v. Geben Sie die zu $G(z)$ zugehörige Steuerbarkeitsnormalform mit dem zuvor ermittelten Parameter ξ an. Welche besondere Eigenschaft hat die sich ergebende Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}$? 2.0 P.|

   b) Gegeben ist ein lineares, zeitdiskretes System der Form **3.5 P.**|

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k. \end{aligned} \tag{8}$$

      i. Es soll der Zustand $\mathbf{x}_k$ mithilfe eines vollständigen Luenberger Beobachters geschätzt werden. Vom System (8) ist folgendes bekannt 2.5 P.|

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad d = 0. \tag{9}$$

      Geben Sie die allgemeinen Zustandsgleichungen des Beobachters und des Beobachtungsfehlers an. Bestimmen Sie den Beobachter so, dass alle Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei $\lambda_j = 0,\ j = 1, 2, 3$ liegen.

      ii. Sie wollen mit dem Beobachter eine konstante Störung w mitschätzen. Geben Sie dazu eine Differenzengleichung erster Ordnung als Störmodell an, die eine konstante Störung w beschreibt. 1.0 P.|

Lösung:

a) i. $(g_k) = (y_k)$

ii. *Das System ist BIBO-stabil, da* $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$ *gilt.*
Das System ist nicht sprungfähig, da $g_0 = 0$ *ist.*

iii. $G(z) = z^{-1} + \xi z^{-2} + z^{-3} = \frac{z^2+\xi z+1}{z^3}$

iv. $|G(\mathrm{e}^{I\omega_0 T_a})| = \frac{\mathrm{e}^{I\frac{\pi}{2}}+\xi \mathrm{e}^{I\frac{\pi}{4}}+1}{\mathrm{e}^{I\frac{3\pi}{4}}} \overset{!}{=} 0 \implies \xi = -\sqrt{2}$

v.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Phi}$ *ist nilpotent (der Ordnung* 3*).*

b) i.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma} u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \qquad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}_k + du_k \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}})\,\mathbf{e}_k = \mathbf{\Phi}_e\,\mathbf{e}_k \qquad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0$$

mit der Fehlerdynamikmatrix

$$\mathbf{\Phi}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\hat{k}_1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{8} + 2\hat{k}_2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} + 2\hat{k}_3 \end{bmatrix}$$

Da das System (9)*in Beobachtbarkeitsnormalform vorliegt, kann* $\hat{\mathbf{k}}$ *aus der letzten Spalte von* $\mathbf{\Phi}_e$ *bestimmt werden*

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

ii.

$$w_{k+1} = w_k, \quad w(0) = w_0$$