Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 07.05.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

   a) Gegeben ist das lineare, zeitdiskrete System **3 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k.$$

   i. Für welche Werte a und b ist das System BIBO-stabil? 1 P.|

   ii. Gehen Sie nun weiters davon aus, dass der gesamte Zustand messtechnisch erfassbar ist sowie $a = 1$, $b = 2$. Entwerfen Sie einen Zustandsregler so, dass alle Pole des geschlossenen Kreises bei $\lambda = -1$ zu liegen kommen. 2 P.|

   b) Geben Sie an, welche Kriterien eine q-Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ erfüllen muss, so dass sie BIBO-stabil und realisierbar ist. **2 P.|**

   c) Gegeben ist die diskrete Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(z) = \frac{-z^2 + 2z\cos(4T_a) - 1}{(z - \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})}.$$

   und die Eingangsfolge

$$(u_k) = 2\sin(\omega_0 k T_a)$$

   mit dem Parameter ω_0. Geben Sie mögliche Werte für $\omega_0 \neq 0$ an, für die die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand exakt verschwindet. Begründen und beweisen Sie Ihre Antwort.

   d) Ein diskretes System antwortet auf die Eingangsfolge $(u_{1,k}) = \delta_k$ mit der Ausgangsfolge $(y_{1,k}) = \delta_{k-1} + \frac{1}{2}\delta_{k-2} + 2(1^{k-3})$. Berechnen Sie für die Eingangsfolge $(u_{2,k}) = \delta_k - \delta_{k-1} + \frac{1}{2}\delta_{k-2}$ die zugehörige Systemantwort $(y_{2,k})$. Berechnen Sie die ersten 4 Elemente von (y_k). **Hinweis**: $\delta_k = 1$ für $k = 0$ und $\delta_k = 0$ sonst. **2 P.|**

Lösung:

a) i. $|a| < 0.5$, b *beliebig*

   ii. $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$

b) $G^{\#}(q) = \frac{z(q)}{n(q)}, \quad n(q_i) = 0$ *mit* $\mathrm{Re}(q_i) < 0$ *sowie* $\lim_{q \to \Omega_0} |G^{\#}(q)| < \infty$

c) $(y_k) = 2|G^{\#}(I\omega_0)| \sin(\omega_0 k T_a + \arg(G^{\#}(I\omega_0))) \Rightarrow |G^{\#}(I\omega_0)| \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \omega_0 = 4$

d) $(y_{2,k}) = \delta_{k-1} - \frac{1}{2}\delta_{k-2} + 2\delta_{k-3} + \frac{1}{4}\delta_{k-4} + (1)^{k-5} = (0, 1, -\frac{1}{2}, 2, \dots)$

2. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

   a) Gegeben ist die Transitionsmatrix **5 P.|**

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

   eines linearen zeitinvarianten Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1}$$

      i. Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems. 1 P.|

      ii. Die Dynamikmatrix des zu (1) zugehörigen Abtastsystems lautet

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

      Bestimmen Sie die zur Diskretisierung verwendete Abtastzeit T_a.

      iii. Bestimmen Sie nun mit dem Eingangsvektor $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ und dem Ausgangsvektor $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ des zeitkontinuierlichen Systems (1) die z-Übertragungsfunktion des zugehörigen Abtastsystems. 3 P.|

   b) Was ist ein Halteglied nullter Ordnung (zero-order hold, *ZOH*)? Skizzieren Sie die Impuls- und Sprungantwort eines Halteglieds nullter Ordnung. Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Halteglieds nullter Ordnung an und beurteilen Sie die BIBO Stabilität. **3 P.|**

   c) Bestimmen Sie für das nichtlineare System **2 P.|**

$$\dot{x} = f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad x(t_0) = x_0$$

   das zugehörige exakte nichtlineare Abtastsystem $x_{k+1} = F(x_k)$ für eine allgemeine Abtastzeit T_a.

Lösung:

a) *i.* $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

ii. $T_a = \ln(2)$

iii. $G(z) = \frac{1}{2z-1}$

b) *D/A Wandler (siehe Skriptum):* $u(t) = u_k$ *für* $kT_a \leq t < (k+1)T_a$*, mit* $G(s) = \frac{1}{s}(1 - \mathrm{e}^{-sT_a})$

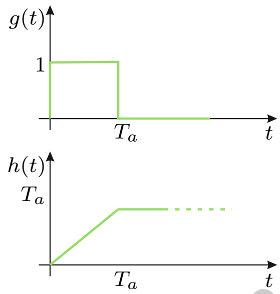

Abbildung 1: Impuls- und Sprungantwort des ZOH-Glieds.

$\int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t = T_a < \infty \Rightarrow$*BIBO-stabil*

c) $x_{k+1} = \ln(\mathrm{e}^{x_k} + T_a)$

3. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

a) Gegeben sind die Systemgleichungen einer nichlinearen elektrischen Schaltung **5 P.|**

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L &= \left(a_0 + a_2 i_L^2\right) u_C \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C &= \frac{u_S - u_C}{RC} - \frac{i_L}{C}.\end{aligned} \tag{2}$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} = [i_L, u_C]^{\mathrm{T}}$, der Stellgröße $u = u_S$ und dem Ausgang $y = i_L$. Die Parameter R, C, a_0 und a_2 sind positiv und konstant.

i. Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Systems. 2 P.|

ii. Bestimmen Sie die Ruhelage(n) $(\mathbf{x}_R, u_R)$ des Systems. 1 P.|

iii. Linearisieren Sie das System um die ermittelte(n) Ruhelage(n) und stellen Sie es wie folgt dar 2 P.|

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \Delta\mathbf{x}_0 \\ \Delta y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u.\end{aligned} \tag{3}$$

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **5 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} \tag{4}$$

i. Benennen Sie das Übertragungsglied und die Parameter ξ und ω_n. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die Parameter ξ und ω_n in Abhängigkeit der allgemeinen Pole s_1 und s_2. 2 P.|

iii. Weisen Sie den Pol-Nullstellen Diagrammen der Systeme 1, 2 und 3 aus Abbildung 2 die Sprungantworten der Systeme A, B und C aus Abbildung 3 zu. Welches System hat den kleinsten Wert von ξ? Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich! 2 P.|

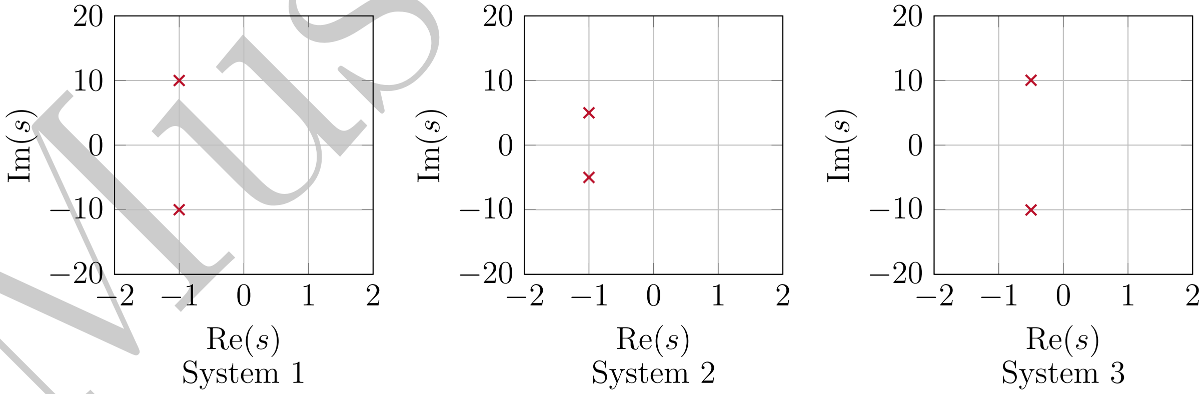

Abbildung 2: Pol-Nullstellen Diagramm der Systeme 1, 2 und 3.

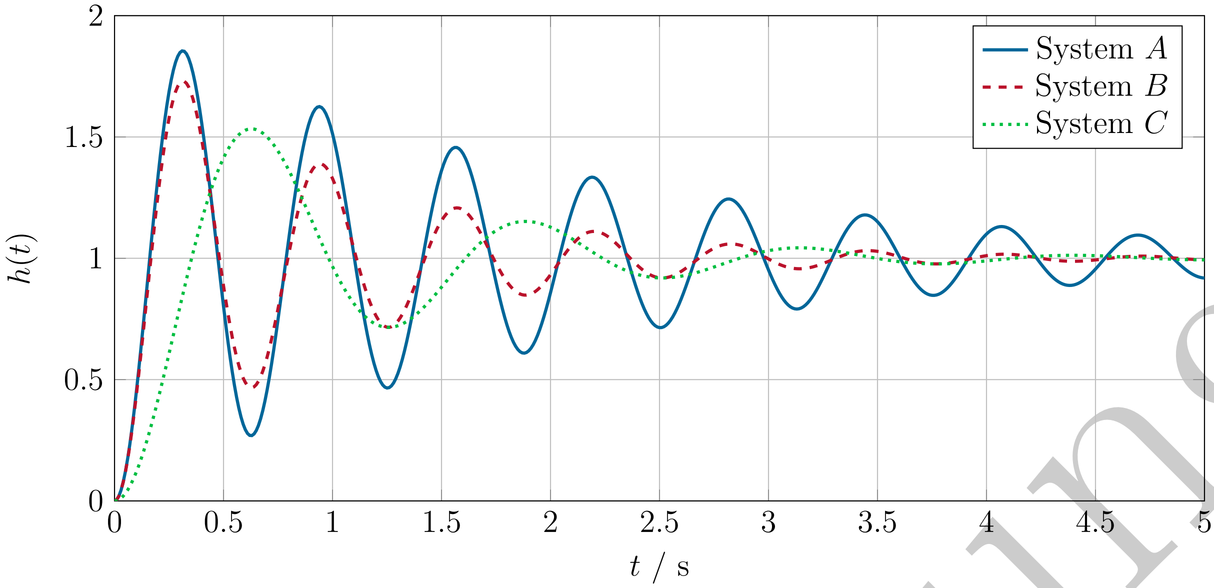

Abbildung 3: Sprungantworten der Systeme A, B und C.

Lösung:

a) *i. Das Blockschaltbild ist in Abbildung 4 gegeben.*

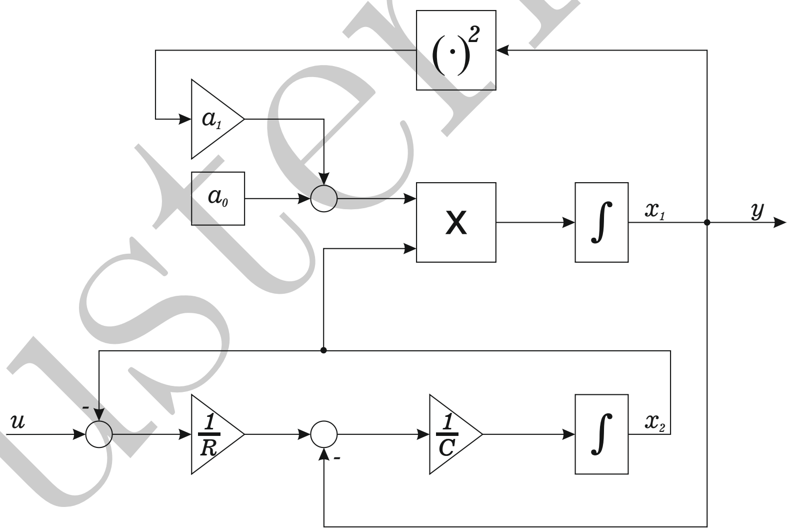

Abbildung 4: Blockschaltbild des Systems (2).

ii. Das System hat eine Ruhelage:

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{u_R}{R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

iii.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 + a_2 x_{1,R}^2 \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

b) i. *Es handelt sich um ein P-T_2-Glied mit dem Dämpfungsgrad ξ und der Kennkreisfrequenz ω_n.*

ii.

$$\omega_n = +\sqrt{s_1 s_2}$$
$$\xi = -\frac{s_1 + s_2}{2\sqrt{s_1 s_2}}$$

iii. *Basieren auf der Lage der Pole der Systeme 1, 2 und 3 ist es ersichtlich, dass die Systeme 1 und 3 dieselbe Kennkreisfrequenz haben, wobei das System 1 einen größeren Dämpfungsgrad als das System 3 hat. Das System 2 hat eine deutlich kleinere Kennkreisfrequenz. Durch Betrachten der Sprungantworten der Systeme A, B und C folgt, dass die Systeme A und B eine näherungsweise selbe Periode haben, wobei das System B stärker gedämpft ist. Das System C hat eine größere Periode als die Systeme A und B. Durch Vergleich der Ergebnisse folgt der Zusammenhang:*

System 1 – System B
System 2 – System C
System 3 – System A

Weiters ist es durch die Lage der Pole der Systeme 1, 2 und 3 ersichtlich, dass das System 2 den größten Dämpfungsgrad besitzt. Das System 1 hat weiters einen größeren Dämpfungsgrad als das System 3. Daraus folgt:

$$\xi_3 < \xi_1 < \xi_2$$

4. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

a) Betrachten Sie den Regelkreis von Abbildung 5. Es ist bekannt, dass die Über- **6 P.|**

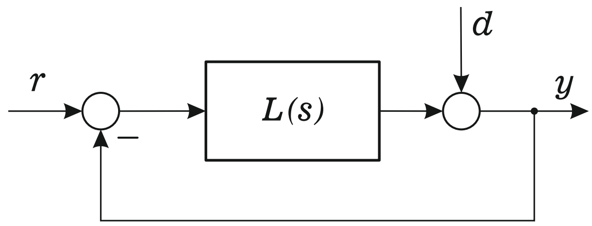

Abbildung 5: Blockschaltbild eines Regelkreises.

tragungsfunktion des offenen Kreises $L(s)$ die Form

$$L(s) = \frac{V}{n_L(s)} \tag{5}$$

hat.

i. Das Nennerpolynom $n_{Try}(s)$ der Führungübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ und die bleibende Regelabweichung e_∞ für das Testsignal $r(t) = \sigma(t)$ sind bekannt. 2 P.|

$$\begin{aligned} n_{Try}(s) &= s^3 + 4s^2 + 6s + 4 \\ e_\infty &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Bestimmen Sie $L(s)$.

ii. Ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil? Ist der geschlossene Regelkreis sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antworten! 1 P.|

iii. Welche Auswirkung hat eine sprungförmige Störung $d(t) = \sigma(t)$ am Ausgang y im stationären Fall? Begründen Sie Ihre Antwort! 1.5 P.|

iv. Wie sieht der stationäre Fehler (Schleppfehler) der Rampenantwort für die Eingangsgröße $r(t) = t\sigma(t)$ aus? Begründen Sie Ihre Antwort! 1.5 P.|

b) Gegeben ist das autonome System **4 P.|**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a^2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

i. Für welche Werte des Parameters a ist das System (7) NICHT vollständig beobachtbar? Zeigen Sie dies mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests! 3 P.|

ii. Kann der Zustand mithilfe eines trivialen Beobachters geschätzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

Lösung:

a) *i.*

$$L(s) = \frac{4}{s^3 + 4s^2 + 6s}$$

ii. *Der geschlossene Regelkreis ist BIBO-Stabil. Der geschlossene Regelkreis ist nicht sprungfähig.*

iii. *Der stationäre Fehler verursacht durch die Störüng $d(t) = \sigma(t)$ ist*

$$e_\infty = 0.$$

iv. *Der Schleppfehler errechnet sich zu*

$$e_\infty = \frac{3}{2}$$

b) *i.* $a = 0$.

ii. *Die Strecke hat positive Eigenwerte und damit ist die Fehlerdynamik instabil $\Longrightarrow$ ein trivialer Beobachter kann nicht benutzt werden.*