

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 02.07.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	10	10	9.5	10.5	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.
- ... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. 10 P. |

a) Gegeben ist das autonome lineare dynamische System 5 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Bestimmen Sie die Lösungstrajektorie $\mathbf{x}(t)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- i. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} . 1 P. |
 - ii. Ist das System (1) global asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P. |
 - iii. Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t)$ und geben Sie die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ in Jordanscher Normalform an. 1.5 P. |
 - iv. Bestimmen Sie die transformierte Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}$ und die Transitionsmatrix Φ des ursprünglichen Systems (1). 1.5 P. |
 - v. Bestimmen Sie die Lösung des ursprünglichen Systems $\mathbf{x}(t)$ von (1). Vereinfachen Sie so weit wie möglich. 0.5 P. |
- b) Gegeben ist die Impulsantwort eines zeitdiskreten linearen Systems in Abb. 1 mit der Systemordnung $n = 3$. 5 P. |

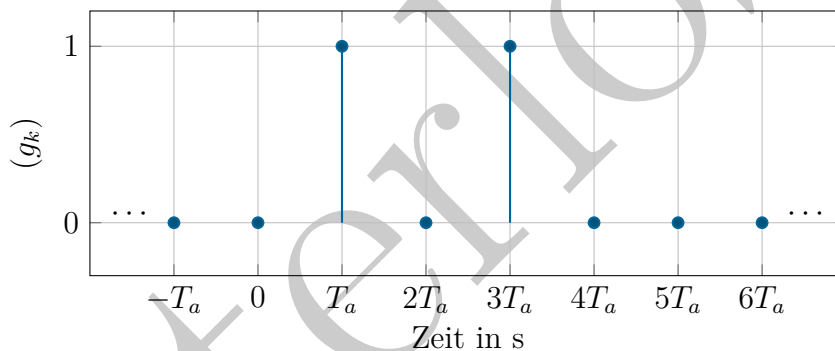


Abbildung 1: Impulsantwort.

- i. Bestimmen Sie die z -Übertragungsfunktion für das System mit der Impulsantwort aus Abb. 1. 0.5 P. |
- ii. Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P. |
- iii. Ist das System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P. |
- iv. Skizzieren Sie die Sprungantwort des Systems. Beschriften Sie die Achsen Ihrer Skizze ausführlich. 1 P. |
- v. Geben Sie die eingeschwingene Lösung für $(u_k) = (1^k) + 2(1^k)e^{-k} + 2\sin(\pi k - 5^\circ)$ an. Vereinfachen Sie so weit wie möglich. 2 P. |

Lösung:

- a) i. $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2, \quad \lambda_{1,2} = -2$
 ii. *Global asymptotisch stabil: Ja, weil $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$*
 iii. $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
 iv. $\tilde{\Phi} = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \mathbf{V}\tilde{\Phi}\mathbf{V}^{-1} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+2t & -4t \\ t & 1-2t \end{bmatrix}$
 v. $\mathbf{x}(t) = \Phi\mathbf{x}_0 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1-2t \\ 1-t \end{bmatrix}$
- b) i. $G(z) = \frac{1+z^2}{z^3}$
 ii. *BIBO-stabil: Ja, weil für alle Pole von $G(z)$ gilt $|z_i| < 1$*
 iii. $\mathbf{H}_d[1, 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Hankelmatrix regulär \rightarrow System vollständig erreichbar und beobachtbar
 iv. *Sprungantwort*

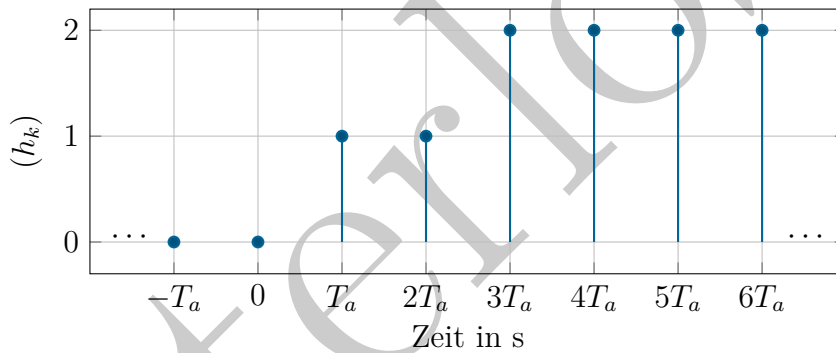


Abbildung 2: Sprungantwort.

v.

$$(y_k) = \left(\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-1} G(z) \right) + 2 |G(e^{j\pi})| \sin\left(\pi k - 5 \frac{\pi}{180} + \arg(G(e^{j\pi}))\right)$$

$$(y_k) = 2 + 4 \sin\left(\pi k - 5 \frac{\pi}{180} + \pi\right)$$

2. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.**

a) Gegeben ist das Pol-Nullstellen Diagramm einer Übertragungsfunktion in Abb. 3. Alle Polstellen \times und Nullstellen \circ sind einfach. **6 P.**

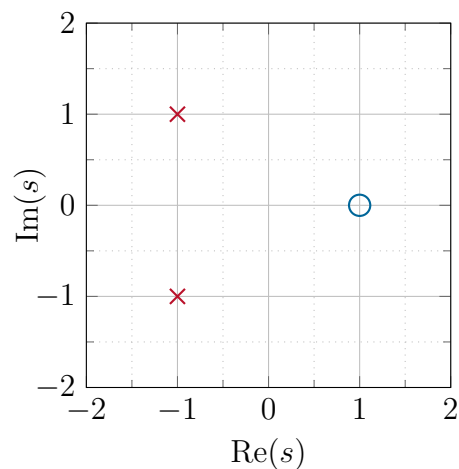


Abbildung 3: Pol-Nullstellen Diagramm.

- i. Bestimmen Sie die s -Übertragungsfunktion für das Pol-Nullstellen Diagramm aus Abb. 3, sodass für die s -Übertragungsfunktion eine stationäre Verstärkung von 2 erreicht wird. **1 P.**
 - ii. Untersuchen Sie die s -Übertragungsfunktion auf folgende Eigenschaften, geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antwort: **2 P.**
 - A. BIBO-Stabilität
 - B. Phasenminimalität
 - C. Sprungfähigkeit
 - D. Realisierbarkeit
 - iii. Berechnen Sie die z -Übertragungsfunktion des zugehörigen Abtastsystems mit der Abtastzeit $T_a = \pi/2$. Vereinfachen Sie so weit wie möglich. **3 P.**
- b) Gegeben ist das zeitdiskrete System **4 P.**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad . \quad (2)$$

- i. Welche Voraussetzung muss das System (2) erfüllen, damit durch einen Zustandsregler die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig platziert werden können? Prüfen Sie, ob das System (2) diese Eigenschaft erfüllt. **1.5 P.**
- ii. Entwerfen Sie für das System (2) einen Dead-Beat Regler. **2 P.**
- iii. Wozu wird ein Dead-Beat Regler verwendet? **0.5 P.**

Lösung:

- a) i. $G(s) = \frac{4(1-s)}{s^2+2s+2}$
ii. A. BIBO-stabil: Ja, weil Polstellen $\operatorname{Re}(s_i) < 0$
B. Phasenminimal: Nein, weil Nullstelle $\operatorname{Re}(s_i) > 0$
C. Sprungfähig: Nein, weil $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$
D. Realisierbar: Ja, weil $\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| < \infty$
iii.

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left(\frac{G(s)}{s} \right)$$
$$G(z) = \frac{2e^{-\pi} + 2z - 6(z-1)e^{-\pi/2}}{z^2 + e^{-\pi}}$$

- b) i. $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Da die Erreichbarkeitsmatrix \mathcal{R} vollen Rang hat ist das System vollständig erreichbar, wodurch die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig platziert werden können.
ii. $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$
iii. Die Anfangsauslenkung \mathbf{x}_0 wird in höchstens n Schritten in $\mathbf{0}$ übergeführt.

3. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

9.5 P. |

a) In Abb. 4 sind die Nyquist-Ortskurven der q -Übertragungsfunktionen $P_i(q), i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben. 4.5 P. |

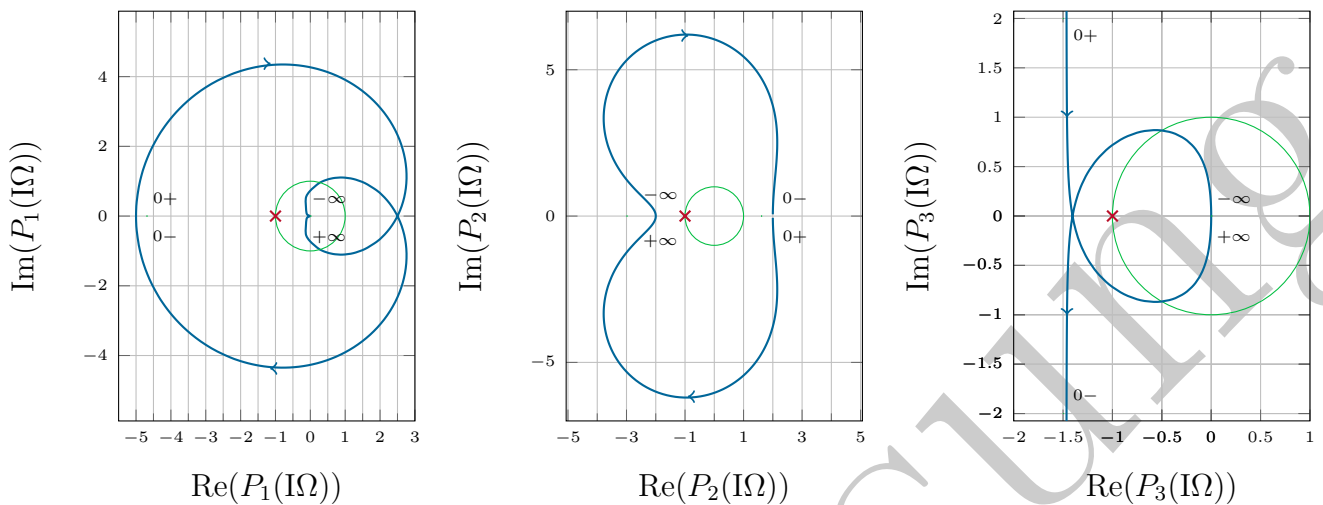


Abbildung 4: Nyquist-Ortskurven der Übertragungsfunktionen $P_i(q)$.

- i. Zusätzlich zu den Nyquist-Ortskurven sind die Bode-Diagramme (A-C) aus den Abbildungen 5a - 5c bekannt. Ordnen Sie jedem Bodediagramm die entsprechende Übertragungsfunktion $P_i(q)$ zu. 1.5 P. |
- ii. In der Tabelle 1 ist der Grad des Zählerpolynoms $\text{grad}(z_{P_i}(q))$, der Grad des Nennerpolynoms $\text{grad}(n_{P_i}(q))$ sowie die Anzahl der Nullstellen des Nennerpolynoms in der rechten $N_+(n_{P_i}(q))$ und linken offenen Halbebene $N_-(n_{P_i}(q))$ der jeweiligen Übertragungsfunktion $P_i(q), i \in \{1, 2, 3\}$ angegeben. 1.5 P. |

i	$\text{grad}(z_{P_i}(q))$	$\text{grad}(n_{P_i}(q))$	$N_-(n_{P_i}(q))$	$N_+(n_{P_i}(q))$
1	1	3	3	0
2	3	3	2	1
3	2	3	1	1

Tabelle 1: Zähler-, Nennergrad sowie Anzahl der Nullstellen des Nennerpolynoms in der linken und rechten offenen q -Halbebene der Übertragungsfunktionen P_i .

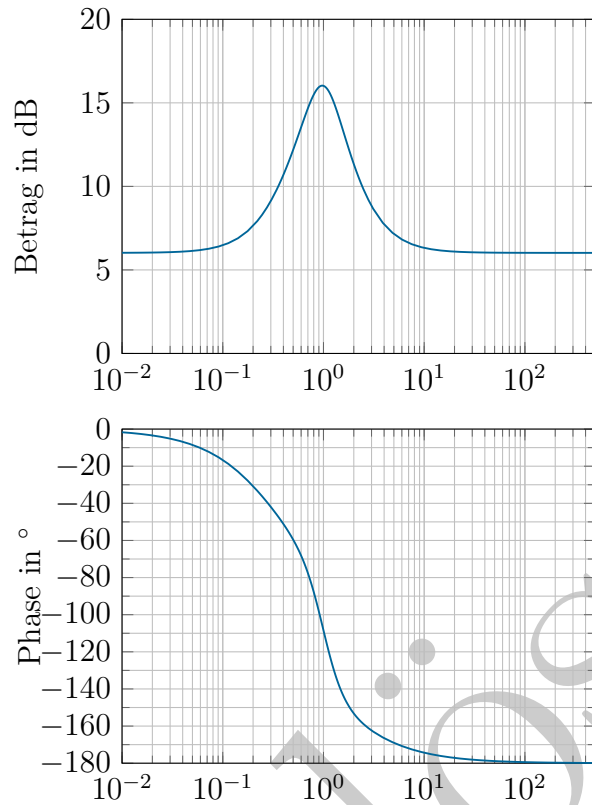
Beurteilen Sie die BIBO-Stabilität des geschlossenen Regelkreises, wenn es sich bei den q -Übertragungsfunktionen um jene des offenen Kreises handelt. Verwenden Sie dazu das Nyquist-Kriterium.

iii. Die q -Übertragungsfunktion $G(q)$ der zeitdiskreten Strecke lautet 1.5 P. |

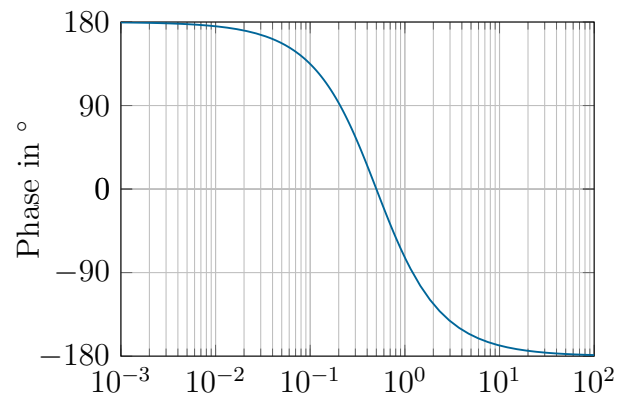
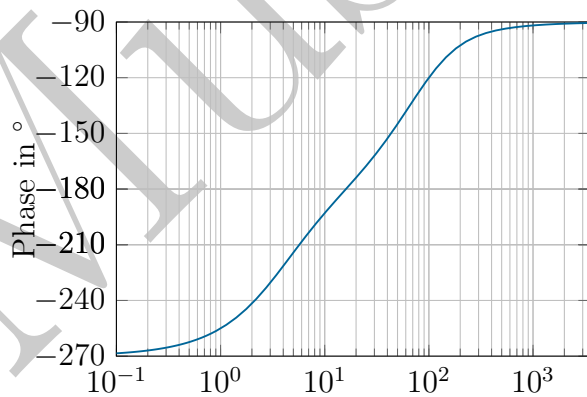
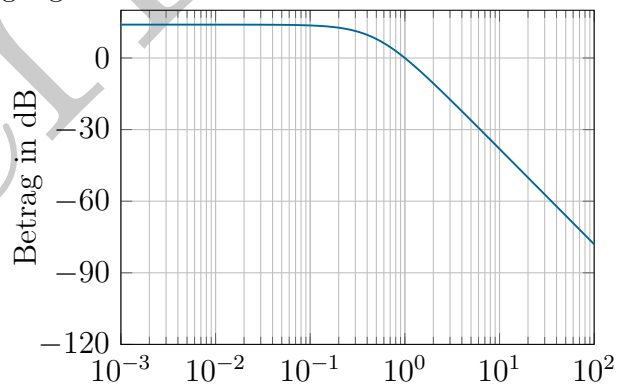
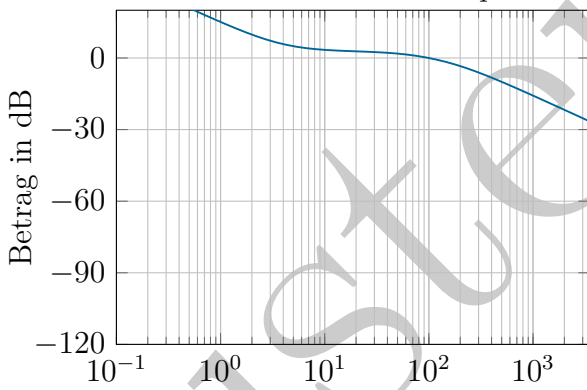
$$G(q) = \frac{q + 4}{4\left(\frac{q}{80} - 1\right)\left(\frac{q}{160} + 1\right)}. \quad (3)$$

Für diese wurde ein PI-Regler der Form

$$R(q) = \frac{V_I(1 + qT_I)}{q} \quad (4)$$



(a) **A** - Betrags- und Phasenfrequenzgang einer q -Übertragungsfunktion.



(b) **B** - Betrags- und Phasenfrequenzgang einer q -Übertragungsfunktion.

(c) **C** - Betrags- und Phasenfrequenzgang der q -Übertragungsfunktion.

Abbildung 5: Bodediagramme **A** - **C** der q -Übertragungsfunktionen.

entworfen. Nehmen Sie an, dass die q -Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L(q)$ das Bodediagramm 5b besitzt. Bestimmen Sie die Anstiegszeit t_r sowie das Überschwingen \ddot{u} der Sprungantwort h_k des geschlossenen Regelkreises $T(q)$.

- b) Gegeben ist der digitale Regelkreis aus Abb. 6 mit der kontinuierlichen Streckenübertragungsfunktion $G(s)$, der z -Übertragungsfunktion des diskreten Reglers $R(z)$ sowie der z -Übertragungsfunktion $V_d(z)$. Die Abtastzeit ist mit $T_a = 1$ gegeben. Mit r_k wird die Führungsgröße, mit d_k die Störung und mit y_k die Ausgangsgröße des Regelkreises bezeichnet.

5 P. |

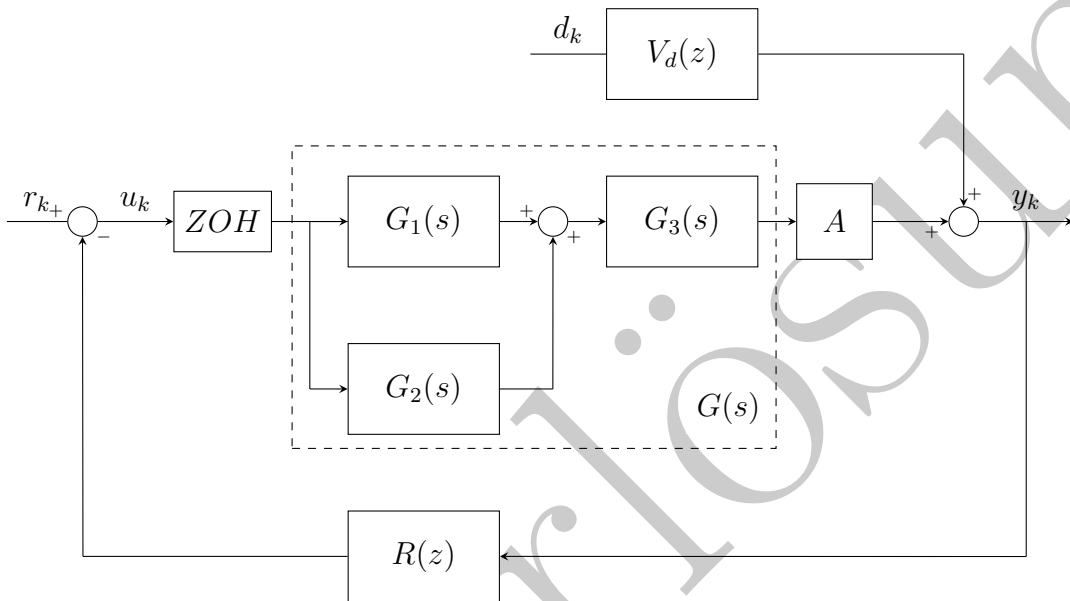


Abbildung 6: Blockschaltbild eines Regelkreises.

- i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der kontinuierlichen Strecke $G(s)$, welche sich aus den Teilübertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$

0.5 P. |

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = 2, \quad G_3(s) = \frac{1-s}{\frac{s}{4}-1} \quad (5)$$

zusammensetzt.

- ii. Bestimmen Sie die allgemeine Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(z)$ mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G(z)$, $R(z)$, $V_d(z)$.

0.5 P. |

- iii. Nehmen Sie an, dass nach der Festlegung eines digitalen Reglers sich die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(z)$ in der Form

2.5 P. |

$$T_{r,y}(z) = \frac{z+1}{(T_I z^2 - z + K T_I)} \quad (6)$$

mit den allgemeinen Reglerparametern $K > 0$, T_I ergibt. Für welchen Wertebereich der Parameter K , T_I ist der geschlossene Kreis BIBO-stabil?

- iv. Wie muss die Abtastzeit eines digitalen Regelkreises gewählt werden, damit alle dynamischen Vorgänge hinreichend gut erfasst werden können? Begründen Sie Ihre Antwort! Was versteht man in diesem Zusammenhang unter dem Aliasing Effekt?

1.5 P. |

Lösung:

- a) i. Bode - Diagramm A - $P_2(q)$ 1.5 P. |
 Bode - Diagramm B - $P_3(q)$
 Bode - Diagramm C - $P_1(q)$

- ii. $P_1(q)$ nicht BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(1, 3) - 3 + 0)\pi = 0\pi$, aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + P_1(I\Omega)) = -2\pi$ 1.5 P. |
 $P_2(q)$ nicht BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(3, 3) - 2 + 1)\pi = 2\pi$, aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + P_2(I\Omega)) = -2\pi$
 $P_3(q)$ BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(2, 3) - 1 + 1)\pi = 3\pi$, aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + P_3(I\Omega)) = 3\pi$

- iii. Aus dem Bode-Diagramm lässt sich die Durchtrittsfrequenz von $w_c = 100$ ablesen. Daraus ergibt sich über die empirische Formel $w_{ct_r} = 1.2$ die Anstiegszeit $t_r = 12\text{ms}$. Aus dem Phasenfrequenzgang lässt sich eine Phasenreserve $\Phi = 60^\circ$ ablesen. Daraus ergibt sich das Überschwingen \ddot{u} mittels der empirischen Formel zu $\ddot{u} = 70 - \Phi = 10\%$. 1.5 P. |

- b) i. 0.5 P. |

$$G(s) = \frac{-8s^2 - 4s + 12}{(s+1)(s-4)} = \frac{-8s^2 - 4s + 12}{s^2 - 3s - 4} \quad (7)$$

- ii. 0.5 P. |

$$T_{r,y}(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)R(z)}$$

$$T_{d,y}(z) = \frac{V_d(z)}{1 + G(z)R(z)}$$

- iii. Notwendige Bedingung: $\left| \frac{a_0}{a_2} \right| < 1$, $a_2 > 0$,
 $T_I > 0$, $-1 < K < 1$, $K > \frac{1-T_I}{T_I}$ 2.5 P. |

z^2	$a_{2,2} = T_I$	$a_{2,1} = -1$	$a_{2,0} = KT_I$	$\lambda_2 = \frac{a_{2,0}}{a_{2,2}}$
z^1	$a_{1,2} = -K^2T_I + T_I$	$a_{1,1} = -1 + K$	0	$\lambda_1 = \frac{a_{1,1}}{a_{1,2}}$
z^0	$a_{0,2} = \frac{-(-1+K)(K+1)^2T_I^2+K-1}{(K+1)T_I}$	0		

Tabelle 2: Jury-Verfahren-Tabelle zur Bestimmung des Wertebereiches der Parameter K , T_I , so dass die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(z)$ BIBO-stabil ist.

- iv. $\frac{\min(t_r)}{T_a} = 4 \dots 10$, Unter dem Aliasing-Effekt versteht man den durch die Abtastung hervorgerufenen Fehler, wenn sich Frequenzanteile des ursprünglichen Signals nicht mehr eindeutig rekonstruieren lassen, welche eine Frequenz von $f > \frac{1}{2T_a}$ besitzen. Diese Frequenzgrenze wird als Nyquist-Frequenz bezeichnet. 1.5 P. |

4. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

10.5 P. |

a) Gegeben ist das System nichtlinearer Differenzgleichungen

5.5 P. |

$$z_{k+2} + 2z_{k+1}^2 = z_{k+1} + \ln(u_k)z_k^2 \quad (8)$$

$$w_{k+1} = w_k + w_k(z_k - z_{k+1}) + \cos(aw_k) \quad (9)$$

mit dem konstanten Koeffizienten $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der Eingangsgröße u_k . Der Ausgang y_k des Systems ist durch die Gleichung

$$y_k = w_k^2 + \frac{1}{u_k} \quad (10)$$

beschrieben.

- i. Geben Sie das System in Zustandsraumdarstellung $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, u_k)$, $y_k = h(\mathbf{x}_k, u_k)$, an, wobei \mathbf{x}_k der zeitdiskrete Zustand und u_k die Eingangsgröße darstellt. 2 P. |
 - ii. Berechnen Sie die Menge aller Ruhelage(n) (\mathbf{x}_R, y_R) des Systems (8) - (10) für $u_{k,R} = \exp(2)$. 1.5 P. |
 - iii. Bestimmen Sie das um eine allgemeine Ruhelage \mathbf{x}_R und u_R linearisierte System mit den Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} . 2 P. |
- b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ 3 P. |

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - 4s - 32} \quad (11)$$

eines kontinuierlichen LTI-Systems.

- i. Geben Sie die Zustandsraumdarstellung von (11) in der 2-ten Standardform an. 1.5 P. |
 - ii. Bestimmen Sie die Verstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ eines vollständigen Beobachters so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamik bei $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -100$ zu liegen kommen. **Hinweis:** Beachten sie die spezielle Form der Zustandsraumdarstellung des Systems. 1.5 P. |
- c) Von einem zeitdiskreten autonomen Abtastsystem der Form 2 P. |

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$
$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k$$

sind die folgenden Transitionsmatrizen $\mathbf{\Psi}_k, k \in \{2, 3\}$ und Ausgangsgrößen $y_k, k \in \{1, 2\}$

$$\mathbf{\Psi}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi}_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{2} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} \quad (13)$$
$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{7}{8}$$

bekannt. Wie lauten die Matrizen $\mathbf{\Phi}$ und \mathbf{c}^T des zeitdiskreten autonomen Abtastsystems?

Lösung:

- a) i. Das System aus nichtlinearer Differenzgleichungen ergibt sich in Zustandsraumdarstellung zu 2 P.

$$\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}]^T = [z_k, z_{k+1}, w_k]^T$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{2,k} \\ x_{2,k} - 2x_{2,k}^2 + \ln(u_k)x_{1,k}^2 \\ x_{3,k} + \cos(x_{3,k}a) + x_{3,k}(x_{1,k} - x_{2,k}) \end{bmatrix}$$

$$y_k = x_{3,k}^2 + \frac{1}{u_k}$$

- ii. Die Menge aller Ruhelagen des Systems ergibt sich zu 1.5 P.

$$\mathbf{x}_R \in \left\{ b, b, \frac{\pi k}{2a} \right\} \text{ mit } b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, u_R = \exp(2), y_R = \left(\frac{\pi k}{2a} \right)^2 + \exp(-2)$$

- iii. Die Systemmatrizen des um die allgemeine Ruhelage (\mathbf{x}_R, u_R) linearisierte Systems ergeben sich zu 2 P.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 \ln(u_R)x_{1,R} & 1 - 4x_{2,k} & 0 \\ x_{3,R} & -x_{3,R} & 1 - a \sin(x_{3,R}a) + x_{1,R} - x_{2,R} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_{1,R}^2}{u_R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \quad 0 \quad 2x_{3,R}] \quad d = \frac{1}{u_R^2}$$

- b) i. 1.5 P.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 32 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 33 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \quad 1] \quad d = 1$$

- ii. $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -532 \\ -109 \end{bmatrix}$ 1.5 P.

- c) 2 P.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$