Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 24.09.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	9,5	10,5	9,5	10,5	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Musterlösung

Viel Erfolg!

1. Nachfolgend wird das nichtlineare System von Differenzengleichungen **9,5 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, u_k) = \begin{bmatrix} \alpha x_{1,k} + (1-\alpha)u_k \\ \beta x_{2,k} + b(1-\beta)(u_k - x_{1,k})^2 \\ \gamma x_{3,k} + c(1-\gamma)(u_k - x_{1,k})^3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

mit dem Ausgang

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \sqrt{x_{1,k}} \\ x_{3,k} / \sqrt{(a + x_{2,k})^3} \end{bmatrix} \tag{2}$$

und den konstanten Koeffizienten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0$ betrachtet.

a) Berechnen Sie die möglichen Ruhelagen des Systems für $u_k = u_\mathrm{R} = \mathrm{const}$ und $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$. **2 P.|**

b) Bestimmen Sie das um eine allgemeine Ruhelage $\mathbf{x}_\mathrm{R}$ und u_R linearisierte System entsprechend **3 P.|**

$$\Delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\Delta u_k \tag{3a}$$

$$\Delta\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\Delta u_k. \tag{3b}$$

Geben Sie die Matrizen $\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ explizit an.

c) Wie müssen die Parameter α, β, γ gewählt werden damit das linearisierte System (3) asymptotisch stabil ist? **1.5 P.|**

d) Berechnen Sie die eingeschwungene Lösung $\mathbf{x}_k$ des nichtlinearen Systems von Differenzengleichungen (1) bei periodischem Eingang $u_k = (-1)^k$. **3 P.|**
Hinweis: Nutzen Sie den Umstand, dass es sich bei der ersten Zeile des Differenzengleichungssystems um ein lineares zeitinvariantes Subsystem handelt.

Musterlösung

Lösung:

a)

$$\mathbf{x}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} u_\mathrm{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi} &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \\
\mathbf{\Gamma} &= \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1/(2\sqrt{u_\mathrm{R}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a^3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{D} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

c)

$$|\alpha|, |\beta|, |\gamma| < 1$$

d)

$$\begin{aligned}
x_{1,k} &= -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}(-1)^k \\
x_{2,k} &= b\left(\frac{2}{1+\alpha}\right)^2 \\
x_{3,k} &= -c\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{2}{1+\alpha}\right)^3(-1)^k
\end{aligned}$$

Musterlösung

2. Die nachfolgenden Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10,5 P.|**

a) Betrachten Sie den Regelkreis mit harmonischer Störung $d(t)$ entsprechend Abbildung 1.

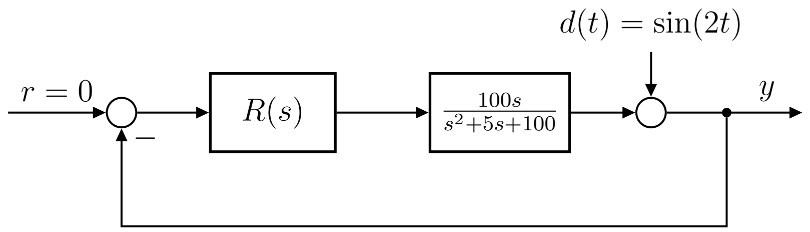


Abbildung 1: Regelkreis mit harmonischer Störung d.

Es soll ein Kompensationsregler

$$R(s) = V\frac{a_2 s^2 + a_1 s + 1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1}$$

entworfen werden, der die harmonische Störung d perfekt kompensiert:

i. Wie müssen die Parameter a_1 und a_2 gewählt werden, damit es sich bei $R(s)$ um einen Kompensationsregler handelt? **1 P.|**

ii. Geben Sie die Störübertragungsfunktion $T_{d,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)}$ an. **1 P.|**

iii. Wie müssen die Parameter b_1 und b_2 gewählt werden, damit im eingeschwungenen Zustand $y(t) = 0$ gilt? **1 P.|**

b) Im Folgenden wird ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s/(2\sqrt{3}) + 1} \mathrm{e}^{-(T_\mathrm{t}+\Delta T_\mathrm{t})s}$$

und einer nominellen Totzeit $T_\mathrm{t} = \pi/12$ betrachtet.

i. Entwerfen Sie für $\Delta T_\mathrm{t} = 0$ einen PI-Regler $R(s)$ so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises folgende Vorgaben erfüllt: **3 P.|**
   - Maximales Überschwingen: 10 %
   - Anstiegszeit: 0.75 s

ii. Welchen Wert darf ΔT_t maximal annehmen, damit der geschlossene Regelkreis mit dem unter (i) entworfenen Regler BIBO-stabil bleibt? Begründen Sie Ihre Antwort! **1 P.|**

Musterlösung

c) Für die Regelung von Totzeitsystemen wird oft eine Regelstruktur entsprechend Abbildung 2 gewählt.

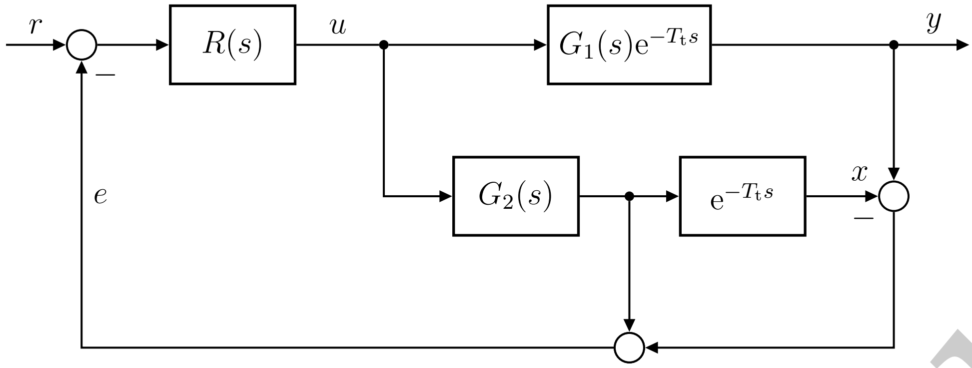


Abbildung 2: Regelkreis für Totzeitsysteme.

i. Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises aus Abbildung 2 für allgemeine Übertragungsfunktionen $R(s), G_1(s), G_2(s)$. **1,5 P.**|

ii. Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort des geschlossenen Regelkreises für die spezielle Wahl **2 P.**|

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+2} \qquad T_\mathrm{t} = 1.$$

Musterlösung

Lösung:

a) i.

$$a_1 = \frac{1}{20}, \qquad a_2 = \frac{1}{100}$$

ii.

$$T_{d,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + 1}{b_2 s^2 + (b_1 + V)s + 1}$$

iii.

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = \frac{1}{4}$$

b) i.

$$R(s) = \frac{s/(2\sqrt{3}) + 1}{s}$$

ii.

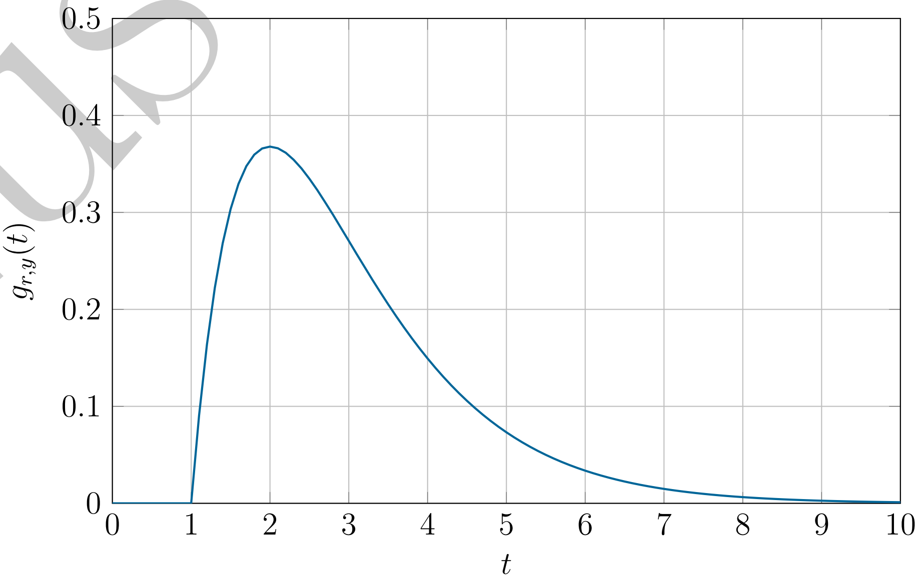
$$\Delta T_\mathrm{t} < \pi/6$$

c) i.

$$T_{r,y}(s) = \frac{R(s)G_1(s)\mathrm{e}^{-T_\mathrm{t}s}}{1 + R(s)G_2(s) + R(s)(G_1(s) - G_2(s))\mathrm{e}^{-T_\mathrm{t}s}}$$

ii.

$$g_{r,y}(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-(t-1)}\sigma(t-1)$$



Musterlösung

3. Die nachfolgenden Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9,5 P.|**

   a) Das zeitkontinuierliche System **2,5 P.|**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t - T_t)\\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

   soll mittels Zero-Order-Hold mit der Abtastzeit T_a diskretisiert werden, wobei für die Eingangstotzeit $T_t = {}^{T_a}\!/_2$ gilt. Stellen Sie das Ergebnis in der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_1 u_k + \mathbf{\Gamma}_2 u_{k-1} \tag{5a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k \tag{5b}$$

   dar. Geben Sie $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Gamma}_1$ und $\mathbf{\Gamma}_2$ explizit an.

   b) Gegeben ist ein System der Form (5) mit

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

      i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$. **2 P.|**

      ii. Geben Sie einen vollständigen Luenberger Beobachter und dessen Beobachtungsfehlerdynamik allgemein an. **2 P.|**

      iii. Bestimmen Sie die Beobachterrückführung $\hat{\mathbf{k}}$ derart, dass die Fehlerdynamik Dead-Beat Verhalten aufweist. **2 P.|**

      iv. Kann für dieses System ein trivialer Beobachter sinnvoll eingesetzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort! **1 P.|**

Musterlösung

Lösung:

a)

$$\mathbf{\Phi} = \exp(\mathbf{A}T_a), \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \int_0^{\frac{T_a}{2}} \exp(\mathbf{A}\tau)\mathbf{b}\,\mathrm{d}\tau, \quad \mathbf{\Gamma}_2 = \int_{\frac{T_a}{2}}^{T_a} \exp(\mathbf{A}\tau)\mathbf{b}\,\mathrm{d}\tau$$

b) i.

$$G(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}z^2}{z(z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2})}$$

ii. Für den Luenberger-Beobachter

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}_1 u_k + \mathbf{\Gamma}_2 u_{k-1} + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k) \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned}$$

folgt die Fehlerdynamik

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)\mathbf{e}_k$$

iii. $\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^T$

iv. Nein, weil $\mathbf{\Phi}$ einen Eigenwert bei 1 besitzt und die Fehlerdynamik des trivialen Beobachters daher nicht asymptotisch gegen 0 geht.

Musterlösung

4. Die nachfolgenden Aufgaben a) – c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10,5 P.|**

a) Gegeben ist ein Blockschaltbild gemäß Abbildung 3.

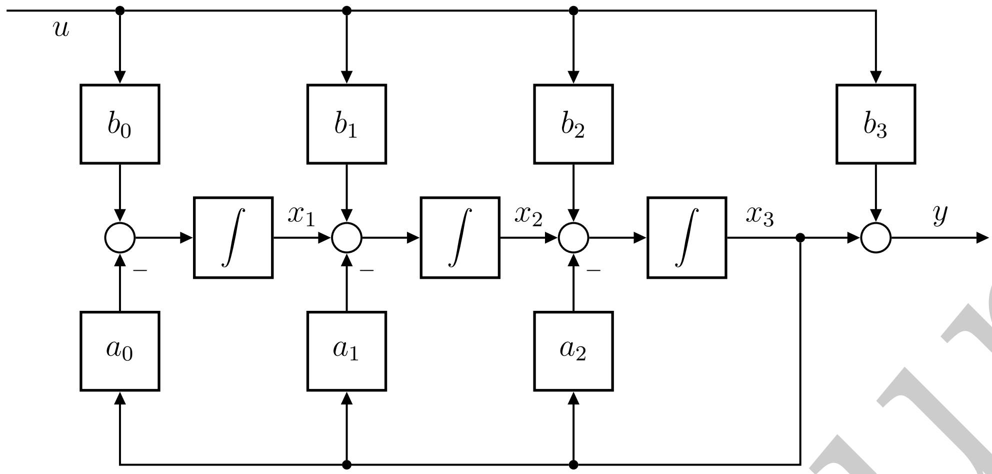


Abbildung 3: Blockschaltbild.

i. Bestimmen Sie ein äquivalentes Zustandsmodell in der Form **2 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{6a}$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du. \tag{6b}$$

ii. Lässt sich eine Kombination von Koeffizienten a_i und b_i so finden, dass das System (6) ein nichtbeobachtbares Teilsystem aufweist? Begründen Sie ihre Antwort! **1 P.|**

b) Für ein allgemeines lineares System wie in (6) wird ein Zustandsregler der Form $u(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x} + gr(t - T_v)$ entworfen. Geben Sie allgemein die resultierende Übertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ des geschlossenen Kreises an. *Hinweis: Beachten Sie die Zeitverzögerung in der Referenzgröße r.)* **1,5 P.|**

c) Gegeben ist das zeitkontinuierliche System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2a \\ 0 & -2 & -2a \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{7}$$

mit dem freien Parameter a, für welches ein linearer Zustandsregler der Form $u(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}$ entworfen werden soll.

i. Für welche a ist das System *nicht* vollständig erreichbar? Verwenden Sie dazu den PBH-Eigenvektortest! **3 P.|**

ii. Entwerfen Sie für den Fall $a = 0$ die Reglerverstärkung $\mathbf{k}$ so, dass alle Pole des geschlossenen Kreises bei $\lambda_i = -1$ zu liegen kommen. **3 P.|**

Musterlösung

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = b_3$$

ii. Nein, da das System in Beobachtbarkeitsnormalform ist und daher unabhängig von der Wahl der Koeffizienten a_i und b_i immer vollständig beobachtbar ist.

b)

$$T_{r,y}(s) = \left[\left(\mathbf{c}^T + d\mathbf{k}^T\right)\left(s\mathbf{E} - A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\right)^{-1}\mathbf{b} + d\right] g \mathrm{e}^{-sT_v}$$

c) *i.* $a = -\frac{1}{2}$

ii. $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Musterlösung