Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 05.11.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	9	11	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist ein autonomes zeitkontinuierliches LTI System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ der Ordnung 2. Bei einem Anfangszustand **10 P.|**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

ergibt sich das Ausgangssignal

$$y(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) = \cos(t) + 2\sin(t). \tag{2}$$

Hingegen ergibt sich bei einem Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

das Ausgangssignal

$$y(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) = \sin(t) - 2\cos(t). \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$. **1 P.|**

b) Bei welchem Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ ergibt sich das Ausgangssignal $y(t) = \sin(t)$. **2 P.|**

c) Bestimmen Sie die zugehörige Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. **5 P.|**
Hinweis: Die Rechnung kann vereinfacht werden, wenn man das Superpositionsprinzip geeignet anwendet.

d) Leiten Sie die allgemeine Lösung des LTI-Systems **2 P.|**

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ &y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \end{aligned}$$

mit dem Eingang u und dem Ausgang y her.

Lösung:

a)

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(0) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

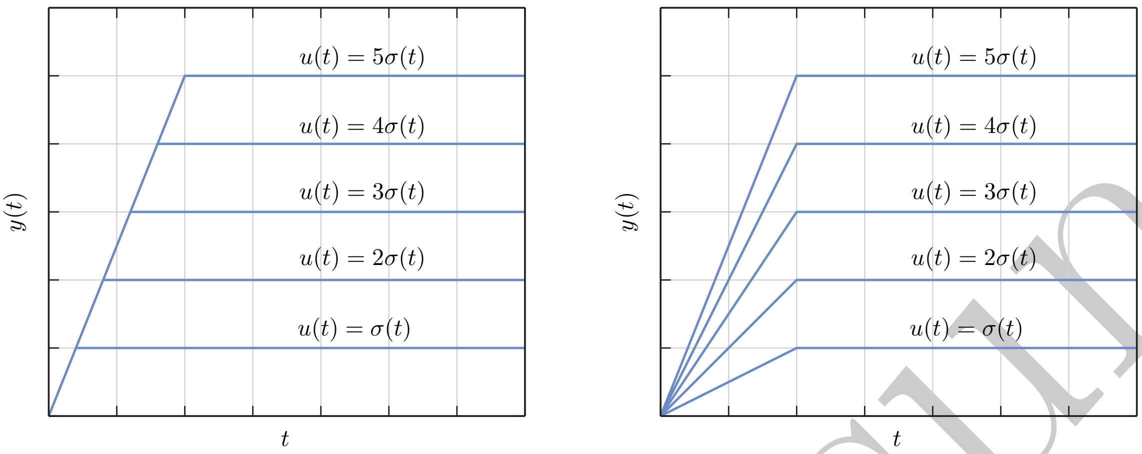
c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Siehe Beweis von Satz 2.4 im Automatisierungs-Skriptum.

2. Die nachfolgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.**|

a) Betrachten Sie die Sprungantworten folgender Systeme, siehe Abbildung 1. Geben Sie an, ob die Systeme 1 und 2 linear oder nichtlinear sind. Begründen Sie Ihre Antwort. **1 P.**|



(a) System 1 (b) System 2

Abbildung 1: Sprungantworten.

b) Gegeben ist das folgende System **3 P.**|

$$\dot{x}(t) = u(t - T_0), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

mit der festen Zeitverschiebung $T_0 > 0$. Beweisen Sie, dass dieses System zeitinvariant oder zeitvariant ist.

c) Sei $\mathbf{A}$ die Dynamikmatrix eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung **2 P.**|

$$\left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}}{s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k s^{-k}. \tag{6}$$

d) Ein vollständiger Luenberger-Beobachter wurde so entwickelt, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix sich zu $\lambda_1 = 3/4$ und $\lambda_2 = 5/7$ ergeben. Die Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{V}\mathbf{e}_k$ erfolgt über die Transformationsmatrix $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$ mit $\mathbf{v}_1^\mathrm{T} = [0 \ 1]$ und $\mathbf{v}_2^\mathrm{T} = [3 \ 1]$. Wie hoch darf die Störung d_0 des Systems $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \mathbf{\Gamma}_d d_k$ mit $(d_k) = d_0(1)^k$ und $\mathbf{\Gamma}_d^\mathrm{T} = [1 \ 1]$ sein, damit für den stationären Beobachtungsfehler $\mathbf{e}_\infty^\mathrm{T} = [e_{\infty,1} \ e_{\infty,2}]$ jeder Eintrag betraglich kleiner 1 ist, d.h. $|e_{\infty,1}| < 1$ und $|e_{\infty,2}| < 1$. **4 P.**|
Hinweis: Schreiben Sie zuerst die Fehlerdynamik für $\mathbf{e}_k$ an und führen Sie dann die Zustandstransformation $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{V}\mathbf{e}_k$ durch.

Lösung:

a) *System 1 ist nichtlinear, System 2 ist linear.*

b)

$$\begin{aligned}\text{Allgemeine Lösung: } x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\sigma - T_0)\mathrm{d}\sigma \\ \text{Verschobene Lösung: } \tilde{x}(t) &= x_0 + \int_{t_0+T}^{t} u(\sigma - T_0 - T)\mathrm{d}\sigma \\ &= x(t-T)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(s) &= \frac{1}{s}(\mathbf{E} - \mathbf{A}/s)^{-1} \\ &= \mathcal{L}\{\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \dots\} \\ &= \frac{1}{s}\Big(\mathbf{E} + \mathbf{A}/s + \mathbf{A}^2/s^2 + \dots\Big) \\ &= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k s^{-k} \\ \Rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A}/s)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k s^{-k}\end{aligned}$$

d)

$$|d_0| < \frac{1}{4}$$

3. Die Aufgaben a) - c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9 P.|**

a) Gegeben ist das nichtlineare dynamische System **4 P.|**

$$\dot{w} + \sin(aw) + b(u - v) = 0 \tag{7a}$$

$$e^{-wb} + \dot{v} - 1 = 0 \tag{7b}$$

mit den Parametern $a, b > 0$, dem Eingang u und dem Ausgang y, der die Gleichung

$$-\ln(y) + w - v + u^2 = 0 \tag{7c}$$

erfüllt.

i. Schreiben Sie das nichtlineare System (7) in Zustandsraumdarstellung an. 1 P.|

ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen des nichtlinearen Systems (7) für $u_R = 0$. 1 P.|

iii. Linearisieren Sie das nichtlineare System (7) um die in ii. berechneten Ruhelagen. Geben Sie dabei den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ sowie die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ und d des um die Ruhelage linearisierten Systems 2 P.|

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\,, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \Delta\mathbf{x}_0 \tag{8a}$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} + d\Delta u \tag{8b}$$

explizit an.

b) Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes System der Form **3 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{9a}$$

$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \tag{9b}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9c}$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9d}$$

und den Parametern $a, b > 0$.

i. Geben Sie die Beobachtbarkeitsmatrix des Systems an. Für welche $a, b > 0$ ist das System vollständig beobachtbar? Ist es mit dieser Wahl von $a, b > 0$ möglich, einen trivialen Beobachter für das System zu entwerfen? Begründen Sie Ihre Antwort. 2 P.|

ii. Geben Sie die Erreichbarkeitsmatrix des Systems an. Für welche $a, b > 0$ ist das System vollständig erreichbar? 1 P.|

c) Skizzieren Sie ein Blockschaltbild für den Regelkreis bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter. Markieren Sie in Ihrer Skizze die Führungsgröße, die Stellgröße sowie die Regelgröße. **2 P.|**

Lösung:

a) *i.*

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(v-u) - \sin(aw) \\ 1 - e^{-wb} \end{bmatrix} \tag{10a}$$

$$y = e^{w-v+u^2} \tag{10b}$$

ii.

$$w_R = 0 \tag{11a}$$

$$v_R = 0 \tag{11b}$$

iii.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} w & v \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{12a}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12b}$$

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad d = 0 \tag{12c}$$

b) *i.*

$$\mathcal{O}(\mathbf{c}, \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a+b & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Für $a \neq b$ ist das System vollständig beobachtbar. Ein trivialer Beobachter ist aufgrund des Eigenwertes bei 0 allerdings nicht möglich.

ii.

$$\mathcal{R}(\mathbf{c}, \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & -b \end{bmatrix} \tag{14}$$

Für $b \neq 0$ ist das System vollständig erreichbar.

c) *Siehe Abbildung 8.3 (Zustandsregler/Zustandsbeobachter Konfiguration) im Automatisierungs-Skriptum.*

4. Die Aufgaben a) - c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **11 P.**

a) Gegeben ist die Sprungantwort gemäß Abb. 2. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion zu der Sprungantwort in Abbildung 2. **2 P.**

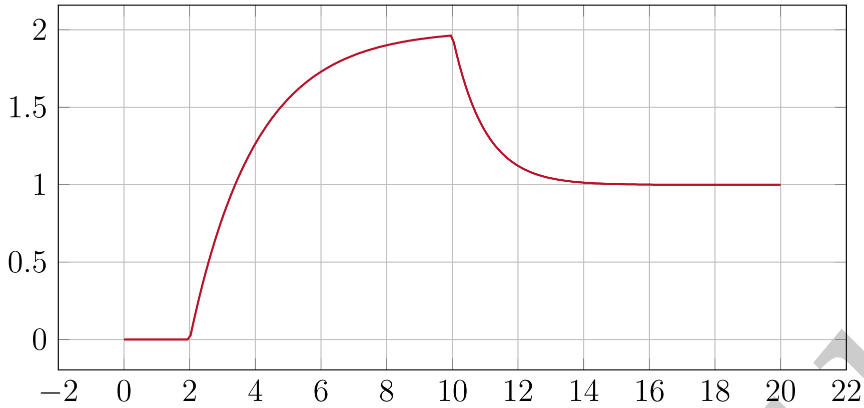


Abbildung 2: Sprungantwort.

b) Nehmen Sie nun an, Sie hätten die Übertragungsfunktion **4 P.**

$$G(s) = \frac{V}{1+sT}e^{-sT_0} \tag{15}$$

identifiziert. Zur Regelung dieses Systems wird Ihnen ein I-Regler

$$R(s) = \frac{V_I}{s} \tag{16}$$

vorgeschlagen.

i. Berechnen Sie allgemein die Reglerverstärkung V_I so, dass sich eine gegebene Phasenreserve Φ einstellt. Vernachlässigen Sie dazu vorerst die Totzeit des Systems. 3 P.

ii. Wie groß darf nun die Totzeit T_0 maximal sein, damit der geschlossene Kreis noch stabil ist. 1 P.

c) Zur Dimensionierung eines Digitalreglers ist es notwendig, das System (15) zu diskretisieren. **5 P.**

i. Bestimmen Sie zu der s-Übertragungsfunktion (15) die zugehörige z-Übertragungsfunktion $G(z)$. Nehmen Sie dazu eine Abtastzeit T_s an für die gilt $\frac{T_0}{T_s} = n \in \mathbb{N}$. 2 P.

ii. Ein System soll mit einem diskreten Proportional-Integral-Regler (Regelparameter k_P und k_I) geregelt werden. Wie sieht die Zustandsdarstellung dieses Reglers mit dem Regelfehler $e_k = r_k - y_k$ als Eingang und dem Ausgang u_k aus? Wie lautet die zugehörige z-Übertragungsfunktion des Reglers? 2 P.

iii. Geben Sie die q-Übertragungsfunktion eines Integralreglers an. 1 P.

Lösung:

a)

$$G(s) = \frac{2}{1+2s}e^{-2s} - \frac{1}{1+s}e^{-10s} \tag{17}$$

b) *i.*

$$L(s) = \frac{VV_I}{s(1+sT)} \tag{18a}$$

$$\arg(L(s)) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_c T) \overset{!}{=} -\pi + \Phi \tag{18b}$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \Phi\right)}{T}$$

$$\|L(s)\| = \frac{VV_I}{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2T^2}} \overset{!}{=} 1 \tag{18c}$$

$$\Rightarrow V_I = \frac{\omega_c\sqrt{1+\omega_c^2T^2}}{V}$$

ii.

$$e^{-j\omega_c T_0} = e^{-j\Phi}$$

$$\omega_c T_0 = \Phi$$

$$T_0 = \frac{\Phi}{\omega_c} \tag{19}$$

c) *i.*

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\underbrace{\left(\frac{V}{s(1+sT)}e^{-sT_0}\right)}_{\left(\frac{V}{s}-\frac{V}{\frac{1}{T}+s}\right)e^{-sT_0}} \\ &= \frac{z-1}{z}V\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\frac{T_s}{T}}}\right)z^{-\frac{T_0}{T_s}} \\ &= V\frac{1-e^{-\frac{T_s}{T}}}{z-e^{-\frac{T_s}{T}}}z^{-n} \end{aligned} \tag{20}$$

ii.

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + k_I e_k \tag{21a}$$

$$u_k = x_{I,k} + k_P e_k \tag{21b}$$

$$R(z) = k_P + \frac{k_I}{z-1} \tag{22}$$

iii.

$$R^{\#}(q) = \frac{V_I\left(1-\frac{q}{\Omega_0}\right)}{q} \tag{23a}$$

$$\Omega_0 = \frac{2}{T_s} \tag{23b}$$