Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 04.02.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	8.5	11	11	9.5	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **8.5 P.**

a) Gegeben sind die folgenden Modellgleichungen: **5.5 P.**

$$
\begin{aligned}
m\dot{v} &= F_{\mathrm{t}} - mg\sin\varphi\,,\\
\dot{\varphi} &= \left(-\frac{1}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{r}\right)v \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{v^2}{g\cos\varphi}\,,\\
\dot{r} &= v\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Der Eingang des Systems ist $u = F_{\mathrm{t}}$. Der Ausgang des Systems ist $y = \varphi$. Die Parameter $m > 0$ und $g > 0$ sind konstant und reellwertig.

i. Geben Sie den Zustandsvektor und die Zustandsraumdarstellung für das nichtlineare System an. 1 P.

ii. Berechnen Sie die Ruhelagen des Systems für $u_{\mathrm{R}} = 0$ und $-\pi/2 < \varphi_{\mathrm{R}} < \pi/2$. 1.5 P.

iii. Linearisieren Sie das nichtlineare System um die in Aufgabe ii. berechneten Ruhelagen und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 3 P.

b) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante System **3 P.**

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u\,,\\
y &= \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\,.
\end{aligned}
$$

i. Ist die Ruhelage für $u = 0$ asymptotisch stabil? 1 P.

ii. Kann für das System ein trivialer Beobachter entworfen werden? 0.5 P.

iii. Für welche $\alpha \neq 0$ kann ein Dead-Beat Beobachter entworfen werden? 1.5 P.

Begründen Sie ihre Antworten ausführlich!

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v & \varphi & r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{F_{\mathrm{t}}}{m} - g\sin\varphi \\ \dfrac{v\cos\varphi}{r} - \dfrac{g\cos\varphi}{v} \\ v\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$y = \varphi$$

ii.

$$\mathbf{x}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{R}} \\ \varphi_{\mathrm{R}} \\ r_{\mathrm{R}} \end{bmatrix}$$

mit

$$\varphi_{\mathrm{R}} = 0$$

$$r_{\mathrm{R}} = \frac{v_{\mathrm{R}}^2}{g}$$

iii.

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\,, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \Delta\mathbf{x}_0$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}$$

mit

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathrm{R}}$$

$$\Delta u = u$$

$$\Delta y = y$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ \dfrac{2g}{v_{\mathrm{R}}^2} & 0 & \dfrac{g^2}{v_{\mathrm{R}}^3} \\ 0 & v_{\mathrm{R}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) *i.*

$$\lambda_{1,2} = -1$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\Re(\lambda_3) > 0 \implies \textit{Nein, die Ruhelage ist nicht stabil.}$$

ii. *Nein, ein trivialer Beobachter ist bei instabilen Systemen nicht anwendbar.*

iii.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \det\mathcal{O} = 0 \implies \textit{nicht beobachtbar}$$

Es kann kein Dead-Beat Beobachter entworfen werden, unabhängig von α (solange $\alpha \neq 0$).

2. *Die Aufgaben a) - d) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **11 P.|**

a) Entwerfen Sie für die Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = \frac{20}{\left(\frac{\sqrt{3}}{10}s + 1\right)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

einen PI-Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Vorgaben erfüllt:

- Überschwingen 40 % und
- Anstiegszeit $t_r = 0.15\,\mathrm{s}$.

b) Diskretisieren Sie das autonome, lineare, zeitinvariante System **3 P.|**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,, \end{aligned}$$

mit einer allgemeinen Abtastzeit $T_\mathrm{a} > 0$, wobei der Parameter α konstant und reellwertig ist.

c) Beweisen Sie allgemein die Gültigkeit des Separationsprinzips für lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Eingrößensysteme der Form **3 P.|**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\,, \\ y_k &= \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}_k\,. \end{aligned}$$

d) Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Lag-Gliedes an und skizzieren Sie dessen Sprungantwort. Beschriften Sie die Sprungantwort und stellen Sie den Zusammenhang zu den Parametern der Übertragungsfunktion her. **2 P.|**

Lösung:

a)

$$R(s) = \frac{V_\mathrm{I}(1+sT_\mathrm{I})}{s} \qquad \textit{mit} \quad V_\mathrm{I} = 1\,, \quad T_\mathrm{I} = \frac{1}{10}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k \\ y_k &= \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha T_\mathrm{a}} & \frac{\alpha}{\alpha-1}(e^{-T_\mathrm{a}} - e^{-\alpha T_\mathrm{a}}) \\ 0 & e^{-T_\mathrm{a}} \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} u_k &= \mathbf{k}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{x}}_k \\ \tilde{\mathbf{x}}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{x}}_k + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\mathrm{T}(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k) - \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k - \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} \\ &= \ldots = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T} & \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\mathrm{T} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}} \tilde{\mathbf{x}}_k \end{aligned}$$

Durch die Blockstruktur von $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ zerfällt das charakteristische Polynom in zwei separate Teile, d. h.

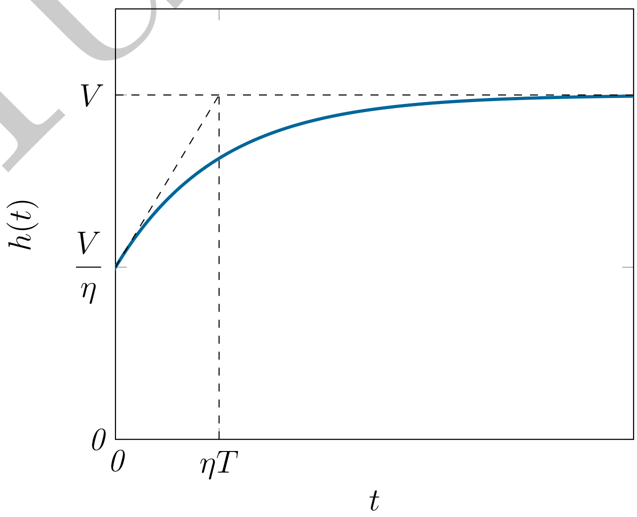
$$\det(\tilde{\mathbf{\Phi}} - \lambda\mathbf{E}_{2n}) = \det(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T} - \lambda\mathbf{E}_n)\det(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\mathrm{T} - \lambda\mathbf{E}_n)$$

und die Pole des Zustandsreglers und des Zustandsbeobachters lassen sich separat über $\mathbf{k}$ bzw. $\hat{\mathbf{k}}$ vorgeben.

d)

$$G(s) = V\frac{1+sT}{1+s\eta T} \qquad \textit{mit} \quad \eta > 1$$

Sprungantwort $h(t)$



3. *Die Aufgaben a) - c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **11 P.|**

a) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante System nach Abbildung 1. **4 P.|**

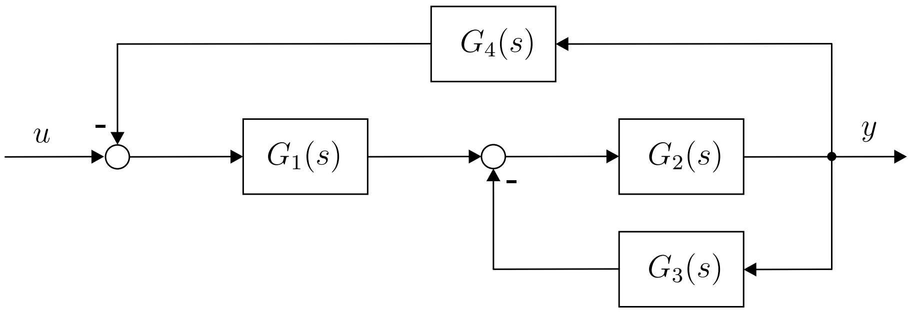


Abbildung 1: Blockschaltbild.

i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ vom Eingang u zum Ausgang y. 2 P.|

ii. Für die Übertragungsfunktionen gelte nun $G_1(s) = \frac{1}{as+1}$, $G_2(s) = V_2$, $G_3(s) = \frac{1}{s}$ und $G_4 = \frac{1}{s+2}$, mit $V_2 > 0$. Für welche Werte von a ist die Übertragungsfunktion BIBO-stabil? 2 P.|

b) Für die Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = \frac{s+1}{(2s^2-1)(s-3)}$$

wurde folgender PID-Regler

$$R(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s\right), \quad K_p = 5, \quad T_I = 2, \quad T_d = 2$$

entworfen. In Abbildung 2 ist die zugehörige Nyquist-Ortskurve des offenen Kreises zu sehen. Verwenden Sie das Nyquist-Kriterium, um die Stabiliät des geschlossenen Regelkreises zu untersuchen.

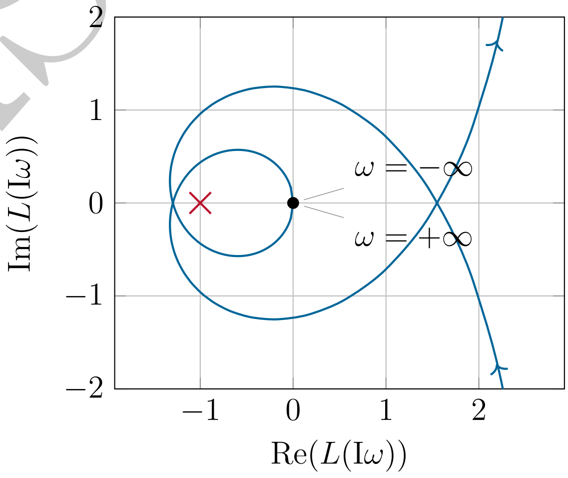


Abbildung 2: Nyquist-Ortskurve des offenen Kreises $L(s)$.

c) Gegeben ist das lineare, zeitdiskrete Eingrößensystem **4 P.|**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\
y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \ .
\end{aligned}
$$

i. Entwerfen Sie für dieses System einen Dead-Beat Regler. 1.5 P.|

ii. In wie vielen Zeitschritten wird eine Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0$ für den geschlossenen Regelkreis nach $\mathbf{0}$ überführt? 0.5 P.|

iii. Die Anfangsauslenkung des ersten Zustands sei $x_{1,0} = 1$. Geben Sie jenes Intervall von Anfangsauslenkungen für den zweiten Zustand $x_{2,0}$ an, damit $|u_k| \leq 2$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. 2 P.|

Lösung:

a) *i.* *Die Übertragungsfunktion lautet*

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_4(s)} \ .$$

ii. *Einsetzen der gegebenen Übertragungsfunktionen ergibt*

$$G(s) = \frac{V_2(s^2 + 2s)}{as^3 + (V_2a + 2a + 1)s^2 + (2V_2a + 2V_2 + 2)s + 2V_2} \ .$$

Aus Pivotspalte der Routh-Hurwitz Tabelle folgt $a > 0$.

b) *Aus dem offenen Kreis*

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{z_L}{n_L} = \frac{20s^3 + 30s^2 + 15s + 5}{2s(2s^2 - 1)(s - 3)}$$

folgt mit dem Nyquist-Kriterium

$$(\max(\mathrm{grad}(z_L),\ \mathrm{grad}(n_L)) - N_-(n_L) + N_+(n_L))\pi = (4 - 1 + 2)\pi = 5\pi \ .$$

Ablesen der stetigen Winkeländerung der Nquist-Ortskurve aus Abbildung 2 ergibt

$$\Delta \arg(1 + L(I\omega)) = 5\pi \ ,$$

daher ist der geschlossene Kreis BIBO-stabil.

c) *i.* *Der Dead-Beat Regler lautet* $u_k = \mathbf{k}^T\mathbf{x}_k$ *mit*

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \ .$$

ii. *Eine Anfangsauslenkung* $\mathbf{x}_0$ *wird in höchstens 2 Schritten nach* $\mathbf{0}$ *überführt.*

iii. *Mit* $u_k = \mathbf{k}^T\mathbf{x}_k$ *lautet das gesuchte Intervall der Anfangsauslenkung für* $|u_k| \leq 2$

$$\frac{2}{3} \leq x_{2,0} \leq \frac{10}{3} \ .$$

4. *Die Aufgaben a) - c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **9.5 P.|**

a) Gegeben ist ein allgemeines lineares, zeitinvariantes Abtastsystem mit der Störung $\mathbf{v}_k$ in der Form **4.5 P.|**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{v}_k\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k\ . \end{aligned}$$

i. Geben Sie die allgemeine Lösung des Zustands $\mathbf{x}_k$ in kompakter Summendarstellung an. <u>*Hinweis:*</u> *Berechnen Sie zuerst* $\mathbf{x}_1$ *und* $\mathbf{x}_2$ *und leiten Sie daraus die Vorschrift für* $\mathbf{x}_k$ *her.* 2 P.|

ii. Nachfolgend wird das System ohne Störung ($\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$) betrachtet. Wie lautet die Bedingung für die Ruhelagen dieses Systems für konstante Eingangsgrößen $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_s$? Wie viele Ruhelagen gibt es? 2.5 P.|

b) Bestimmen Sie die eingeschwungene Lösung einer BIBO-stabilen Übertragungsfunktion $G(z)$ für die Eingangsfolge **2 P.|**

$$(u_k) = \left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}kT_a + \frac{\pi}{8}\right)\right), \quad T_a = 0.5\,\mathrm{s}\ .$$

c) Gegeben ist die q-Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G^{\#}(q) = \frac{\frac{q}{3} - 2}{\left(\frac{q}{6} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{q}{4} + 2\right)}\ .$$

i. Ist diese q-Übertragungsfunktion BIBO-stabil? 1 P.|

Untersuchen Sie für welche sinnvollen Abtastzeiten T_a die q-Übertragungsfunktion

ii. sprungfähig und 1 P.|

iii. realisierbar 1 P.|

ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung:

a) *i. Die allgemeine Lösung lautet*

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^{k-j-1} (\mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_j + \mathbf{H} \mathbf{v}_j) \ .$$

ii. Die Bedingung für die Ruhelage lautet

$$(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) \mathbf{x}_R = \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_s \ .$$

Für die Anzahl der Ruhelagen muss wie folgt unterschieden werden:

Fall 1) Für $\det(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) \neq 0$ *ist die einzige Ruhelage* $\mathbf{x}_R = (\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_s$*.*

Fall 2) Für $\det(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) = 0$ *und* $\operatorname{rang}(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) = \operatorname{rang}([(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})])$ *gibt es unendlich viele Ruhelagen.*

Fall 3) Für $\det(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) = 0$ *und* $\operatorname{rang}(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}) \neq \operatorname{rang}([(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}), \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_s])$ *gibt es keine Ruhelage.*

b) Die eingeschwungene Ausgangsfolge lautet

$$(y_k) = \left(\frac{1}{2} \left| G\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}\frac{\pi}{4}} \right) \right| \cos\left(\frac{\pi}{4} k + \frac{\pi}{8} + \arg\left(G\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}\frac{\pi}{4}} \right) \right) \right) \right) \ .$$

c) *i. Die q-Übertragungsfunktion ist BIBO-stabil (Polstellen bei* $q_1 = -3$ *und* $q_2 = -8$*).*

ii. Die q-Übertragungsfunktion ist für alle positiven $T_a \neq \frac{1}{3}$ *sprungfähig.*

iii. Die q-Übertragungsfunktion ist für alle positiven T_a *realisierbar.*