**Technische Universität Wien**
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 03.06.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | Bonus | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 9 | 8.5 | 11 | 11.5 | 5 | 40 + (5) |
| erreichte Punkte | | | | | | |

**Bitte** ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.



**Viel Erfolg!**

1. Sie können die Aufgaben a), b) und c) unabhängig voneinander lösen. **9 P.**|

   Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-ax_1x_2 + bu_1 - x_1u_2\\ cx_1x_2 - x_2u_2\end{bmatrix}$$

   mit den Ausgängen

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(b - x_1)u_2\\ x_2\end{bmatrix}.$$

   Hierbei gilt für die Modellparameter $a, b, c > 0$, für die Zustände $\mathbf{x}$: $x_1, x_2 \geq 0$ und für die Eingangsgrößen $\mathbf{u}$: $u_1, u_2 > 0$.

   a) Berechnen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_\mathrm{R}$ des dynamischen Systems für konstante Eingänge $\mathbf{u}_\mathrm{R}$. **2 P.**|

   b) Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_\mathrm{R},\ \mathbf{u}_\mathrm{R})$ und geben Sie die Systemmatrizen $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ in der folgenden Form an: **3 P.**|

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}\\ \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}\end{aligned}$$

   c) Untersuchen Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix}-1 & -\frac{4}{3}\\ \frac{1}{6} & 0\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}2 & -\frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

      i. Ist die Ruhelage dieses Systems für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! **1 P.**|

      ii. Geben Sie die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises unter Verwendung einer Ausgangsrückführung $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y} = \begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\mathbf{y}$ an. **1.5 P.**|

      iii. Wählen Sie die Einträge $K_{ij}$ von $\mathbf{K}$ so, dass sich die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises zu $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ergibt. **1.5 P.**|

**Lösung:**

*a)* $\begin{bmatrix} x_{1,R} \\ x_{2,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\dfrac{u_{1,R}}{u_{2,R}} \\ 0 \end{bmatrix}$ *oder* $\begin{bmatrix} x_{1,R} \\ x_{2,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u_{2,R}}{c} \\ \dfrac{bcu_{1,R} - u_{2,R}^2}{au_{2,R}} \end{bmatrix}$

*b)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -ax_{2,R} - u_{2,R} & -ax_{1,R} \\ cx_{2,R} & cx_{1,R} - u_{2,R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & -x_{1,R} \\ 0 & -x_{2,R} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -u_{2,R} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & b - x_{1,R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*c)* i. *ja, Eigenwerte bei* $-\frac{1}{3}$ *und* $-\frac{2}{3}$.

ii. $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 + 2K_{11} - \frac{2}{3}K_{21} & -\frac{4}{3} - 2K_{12} + \frac{2}{3}K_{22} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}K_{21} & \frac{1}{6}K_{22} \end{bmatrix}\mathbf{x}$

iii. $\mathbf{K}$ *kann über Koeffizientenvergleich von* $\mathbf{A} + \mathbf{BKC} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *oder über die Bedingung* $\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \mathbf{A}\right)\mathbf{C}^{-1}$ *berechnet werden:*

$$\begin{bmatrix} -1 + 2K_{11} - \frac{2}{3}K_{21} & -\frac{4}{3} - 2K_{12} + \frac{2}{3}K_{22} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}K_{21} & \frac{1}{6}K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$K_{11} = \frac{1}{3}$, $K_{12} = -\frac{8}{3}$, $K_{21} = 1$ *und* $K_{22} = -6$.

2. Die nachfolgenden Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **8.5 P.|**

   a) i. Für welchen Bereich der Parameter $k_1, k_2$ handelt es bei nachfolgenden Polynomen $p_1(s)$ und $p_2(s)$ um Hurwitz-Polynome? Begründen Sie Ihre Aussage! **3 P.|**

$$p_1(s) = s^3 - k_1 s + 2$$
$$p_2(s) = s^4 + s^3 + 6s^2 + k_2 s + 3$$

   ii. Abbildung 1 zeigt die Ortskurve eines Polynoms $p_3(s)$ dritter Ordnung. Stellen Sie anhand der Ortskurve fest, ob es sich bei $p_3(s)$ um ein Hurwitz-Polynom handelt. **1 P.|**

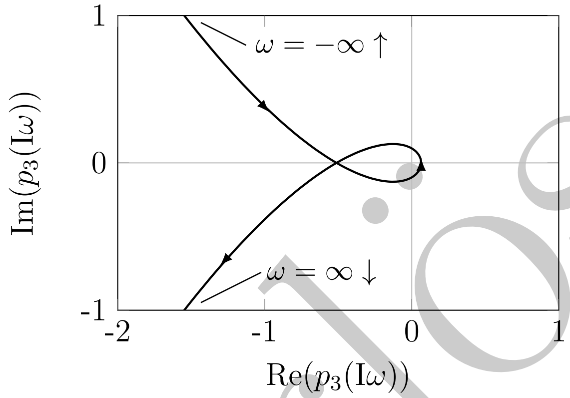


Abbildung 1: Ortskurve des Polynoms $p_3(s)$.

   b) Ist ein lineares, zeitinvariantes System mit beschränkter Impulsantwort, also $|g(t)| \leq c$, $\forall t \geq 0$, $c = \text{const}$, BIBO-stabil? Wenn JA, begründen Sie Ihre Aussage. Wenn NEIN, geben Sie ein Gegenbeispiel an. **2 P.|**

   c) Gegeben sind die Strecke $G(s)$ und der Regler $R(s)$ **2.5 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{10}s + 1}, \qquad R(s) = \frac{5}{10}\frac{10+s}{s}.$$

Von der Übertragungsfunktion des offenen Kreises ist bekannt, dass die Betragskennlinie nur einen Schnittpunkt mit der 0dB-Linie bei $\omega = 2\mathrm{s}^{-1}$ aufweist. Beurteilen Sie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

**Hinweis:** Verwenden Sie die Näherung $\arctan(x) = 45x[°]$ für $x \in [-1, 1]$.

**Lösung:**

a) i. *Der Koeffizient zu* $s^2$ *fehlt in* $p_1(s)$. *Damit kann* $p_1(s)$ *kein Hurwitz-Polynom sein.*
   ii. $3 - \sqrt{6} < k_2 < 3 + \sqrt{6}$
   iii. $p_3(s)$ *hat Ordnung drei und* $\Delta\arg(p_3(I\omega)) = 3\pi$
   $\Rightarrow$ $p_3(s)$ *ist ein Hurwitz-Polynom*

b) *NEIN, ein lineares, zeitinvariantes System mit beschränkter Impulsantwort ist nicht zwinged BIBO-stabil.*
   *Gegenbeispiel:* $G(s) = 1/s$ *mit* $g(t) = \sigma(t)$.

c) *Die Phasenreserve beträgt* $\mathbf{\Phi} \approx -78°$. *Der Regelkreis ist damit instabil!*

3. Die nachfolgenden Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden. **11 P.**|

a) Betrachten Sie die Zusammenschaltung der Übertragungsfunktionen **3 P.**|

$$G_1(s) = G_4(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}, \qquad G_3(z) = \frac{T_a}{z-1}$$

in Abbildung 2. Berechnen Sie die zeitdiskrete Gesamtübertragungsfunktion $G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)}$

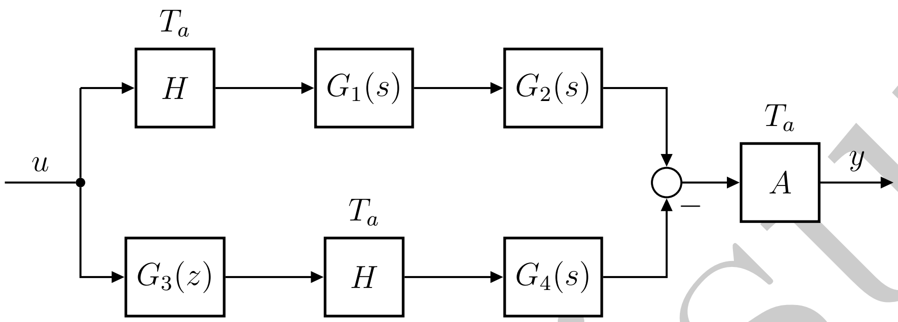


Abbildung 2: Blockschaltbild.

b) Nachfolgend soll die $q$-Übertragungsfunktion **2.5 P.**|

$$G^{\#}(q) = -\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{q}{2}+1\right)\left(\frac{q}{3}-3\right)}{\left(\frac{q}{12}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q}{4}-1\right)}$$

mit der Abtastzeit $T_a$ untersucht werden.

i. Handelt es sich bei $G^{\#}(q)$ um ein BIBO-stabiles System?
ii. Für welche $T_a$ beschreibt $G^{\#}(q)$ ein *sprungfähiges* System?
iii. Für welche $T_a$ beschreibt $G^{\#}(q)$ ein *realisierbares* System?

Begründen Sie Ihre Aussagen!

c) Die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $L(z)$ eines offenen einschleifigen Standardregelkreises habe die Form **2.5 P.**|

$$L(z) = \frac{V_L}{(z-1)}\frac{a_L(z)}{b_L(z)}, \qquad a_L(1) = b_L(1) = 1.$$

Zeigen Sie, dass sich die Regelabweichung bei rampenförmiger Referenzgröße zu $e_\infty|_{r_k=k} = 1/V_L$ ergibt. Welche Bedingung(en) muss der geschlossene Regelkreis erfüllen damit ihre Rechnung zulässig ist?

d) Geben Sie eine Minimalrealisierung der Form **3 P.**|

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_r r_k + \mathbf{b}_y y_k \\ u_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + d_r r_k + d_y y_k\end{aligned}$$

für einen Regler mit zwei Freiheitsgraden

$$u_z(z) = \frac{(z+\frac{1}{2})}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} r_z(z) - \frac{(z-\frac{1}{3})}{(z-1)} y_z(z)$$

an.

**Lösung:**

*a)*

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \left(\frac{T_a}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T_a}}\right) - \left(\frac{T_a}{z-1} - \frac{T_a}{z-e^{-T_a}}\right) \\
&= \frac{e^{-T_a} - (1 - T_a}{(z-e^{-T_a})}
\end{aligned}
$$

*b)* *i.* $G^{\#}(q)$ *ist KEIN BIBO-stabiles System.*

*ii.* $T_a \neq 2/9$

*iii.* $T_a \neq 1/2$

*c)*

$$
e_\infty|_{r_k=k} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1+L(z)}\frac{z}{(z-1)^2} = 1/V_L
$$

*d)* *Beobachtbarkeitsnormalform:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} r_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} y_k \\
u_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + 0 r_k - 1 y_k
\end{aligned}
$$

4. Sie können die Aufgaben a), b), c), d) und e) unabhängig voneinander lösen. **11.5 P.|**

Betrachten Sie das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \tag{1}$$

mit den reellen Parameters $\alpha, \beta, \gamma$ und dem Zustand $\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}]^{\mathrm{T}}$.

a) Welche spezielle Eigenschaft hat das System für den Spezialfall $\alpha = \beta = \gamma = 0$? **0.5 P.|**

b) Gibt es eine Kombination der Paramter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ so, dass das System (1) nicht vollständig erreichbar ist? Begründen Sie Ihre Aussage! **1 P.|**

c) Als Ausgang des Systems (1) wird nun $y_k = x_{1,k}$ gewählt. Geben sie die Eingangsfolge $u_k$ und den Anfangswert $\mathbf{x}_0 = [x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}]$ für allgemeine $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ so an, dass $y_k = (0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0, \dots)$ gilt. **3 P.|**

d) Berechnen sie die Verstärkung $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ eines Zustandsreglers $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k$ in Abhängigkeit der Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\mathrm{I}$ liegen. **2 P.|**

e) Gegeben ist das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2\rho \\ -\rho \end{bmatrix} u_k. \tag{2}$$

i. Geben Sie die Bedingung(en) für den Parameter $\rho$ an damit sich das System (2) über eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x}_k = \mathbf{T}\mathbf{z}_k$ auf die Form von System (1) transformieren lässt. **3 P.|**

ii. Berechnen Sie die Werte der Parameter $\alpha, \beta, \gamma$ wenn Sie diese Transformation durchführen. **2 P.|**
**Hinweis:** Sie müssen die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ nicht explizit angeben bzw. berechnen.

**Lösung:**

a) *Das System besitzt Dead-Beat-Verhalten für* $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

b) *Nein, die Erreichbarkeitsmatrix hat unabhängig von* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *immer vollen Rang, siehe (7.59) im Skriptum Automatisierung.*

c) $y_z(z) = z^{-3} + 2z^{-4} \stackrel{!}{=} \dfrac{1}{z^3 - \gamma z^2 - \beta z - \alpha} u_z(z) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{x}_0 z$,
*daraus folgt* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ *durch Koeffizientenvergleich oder der Tatsache, dass die Koeffizienten von* $z^0$, $z^{-1}$ *und* $z^{-2}$ *in* $y_z(z)$ *gleich null sind.*
*Weiters,* $u_z(z) = z^{-4}(z+2)\left(z^3 - \gamma z^2 - \beta z - \alpha\right)$

$$= 1 + (2-\gamma)z^{-1} + (-2\gamma - \beta)z^{-2} + (-2\beta - \alpha)z^{-3} - 2\alpha z^{-4},$$

*also* $u_k = (1,\ 2-\gamma,\ -2\gamma-\beta,\ -2\beta-\alpha,\ -2\alpha,\ 0,\ 0,\ \ldots)$

d) $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ *führt zu* $\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha + k_1 & \beta + k_2 & \gamma + k_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k$ *und zusammen mit dem gewünschten charakteristischen Polynom* $(z + \frac{1}{2})(z + \frac{1-\mathrm{I}}{2})(z + \frac{1+\mathrm{I}}{2}) = z^3 + \frac{3}{2}z^2 + z + \frac{1}{4}$ *ergibt sich (Steuerbarkeitsnormalform):*

$$k_1 = -\frac{1}{4} - \alpha, \qquad k_2 = -1 - \beta, \qquad k_3 = -\frac{3}{2} - \gamma.$$

e) i. $\det \mathcal{R} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1-\rho & 1+\rho \\ 2\rho & 0 & 4\rho \\ -\rho & 2\rho & 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{\neq} 0 \implies \rho \neq 0$ *und* $\rho \neq 1$

ii. *Da das charakteristische Polynom invariant gegenüber Zustandstransformationen ist und in der Steuerbarkeitsnormalform einfach abgelesen werden kann* ($z^3 - \gamma z^2 - \beta z - \alpha$)*, ist es ausreichend, das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix in* (2) *zu bestimmen:*

$$\det \begin{bmatrix} z-1 & 0 & -1 \\ 0 & z-1 & -2 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix} = z^3 - 2z^2 - z + 2, \text{ damit}$$

$$\alpha = -2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2.$$