Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 08.07.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer:
Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	11	9	11	9	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Sie können die Aufgaben a) - c) und d) unabhängig voneinander lösen. **11 P.|**
Die Bewegungsgleichung eines Systems lautet

$$I\ddot{\phi} = -c\phi - d\dot{\phi} + Kl^2 \sin\psi(\cos\phi)^2 \qquad (1)$$

wobei I, c, d, K, $l > 0$ Konstanten sind.

Weiterhin gilt $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, wobei $u = \psi$ der Eingang und $y = \phi$ der Ausgang des Systems ist.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung (1) als System von Differentialgleichungen der Form $\dot{x} = f(x, u)$ dar. **1 P.|**

b) Berechnen Sie die Ruhelage des Systems für $u_R = 0$. **1 P.|**

c) Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_\mathrm{R},\ u_\mathrm{R})$ und geben Sie die Systemmatrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und d in der folgenden Form an: **3 P.|**

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\\ \Delta y &= \mathbf{c}^\top\Delta\mathbf{x} + d\Delta u\end{aligned}$$

d) Gegeben ist das lineare zeitinvariante System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} u\\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

i. Berechnen Sie für einen Eingang der Form $u = ky$ den Wertebereich von k damit das System stabil ist. **2 P.|**

ii. Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ für $k = \frac{10}{3}$. **2 P.|**

iii. Berechnen Sie den Anfangswert $\mathbf{x}(0)$ für $k = \frac{10}{3}$, wenn für $\mathbf{x}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 1$ gilt $\mathbf{x}(1) = [1 \quad 1]^\top$. **2 P.|**

Lösung:

a)

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{I}x_1 - \frac{d}{I}x_2 + \frac{Kl^2}{I}\sin\psi\cos{x_1}^2 \end{bmatrix}$$

mit $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$

b) $\phi = 0$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{I} - 2\sin x_{1_R}\cos x_{1_R}\sin\psi_R\frac{Kl^2}{2} & -\frac{d}{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Kl^2}{I}\cos\psi_R\cos{x_{1_R}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = 0$$

d) *Die neue Dynamikmatrix ist*

$$\mathbf{A}_{new} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2}k - 5 & -6 \end{bmatrix}$$

woraus man entweder über die Eigenwertsbedingung auf $k < \frac{10}{3}$ *kommt oder weil der Wert an der Stelle in der Matrix kleiner als* 0 *sein muss.*

ii. *Die neue Dynamikmatrix ergibt sich zu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Durch ausschreiben der Exponentialreihe erhält man

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6^2 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & 6^2 \\ 0 & -6^3 \end{bmatrix}\frac{t^3}{3!} + \dots \tag{3}$$

was nach weiterer Umformung zu

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6}(1 - e^{-6t}) \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix} \tag{4}$$

führt.

iii. *Mittels* $x(0) = \Phi(-t)x(t)$ *ergibt sich*

$$x(0) = \Phi(-1)x(1) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{6}(1 - e^6) \\ e^6 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

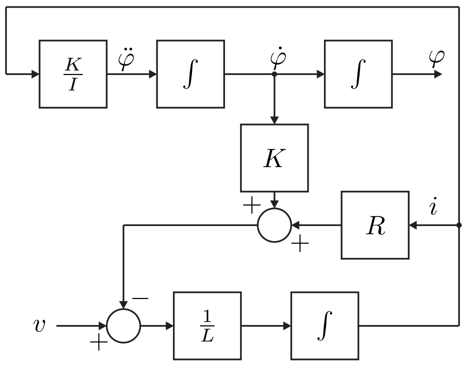


Abbildung 1: Strukturschaltbild GSM

2. Die nachfolgenden Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9 P.|**

   a) Gegeben is das Strukturschaltbild einer Gleichstrommaschine (GSM) mit Schwungscheibe. Die Konstanten K, I, R und L sind positiv und reell. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $T_{v,\varphi}$ von v nach φ und die Übertragungsfunktion $T_{v,\ddot{\varphi}}$ von v nach $\ddot{\varphi}$. **2.5 P.|**

   b) Nun wird eine Kaskadenregelung für die GSM betrachtet. **4.5 P.|**

      i. Skizzieren Sie das Blockschaltbild der Kaskadenregelung, wobei v die Stellgröße (Spannung) darstellt, der innerer Regelkreis den Strom i regeln soll und der äußere Regekreis die Drehzahl $\dot{\varphi}$ regelt. Bezeichnen Sie den inneren Regler mit $R_i(s)$ und den äußeren Regler mit $R_a(s)$.

      ii. Geben Sie an, welche Übertragungsfunktionen dem Reglerentwurf von $R_i(s)$ und $R_a(s)$ zugrundeliegen.

      iii. Warum setzt man eine Kaskadenregelung ein? Was ist der Vorteil gegenüber einer Regelung, die direkt die Drehzahl $\dot{\varphi}$ über v regelt?

      iv. Wie werden die Durchtrittsfrequenzen (Bandbreiten) des inneren und äußeren Regelkreises gewählt? Warum sieht die Wahl so aus?

   c) Das System

$$G(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

   wird mit einem P-Regler $R(s) = k_p$ geregelt. Die Nyquist-Ortskurve von $G(s)$ ist in Abbildung 2 dargestellt.

      i. Ist der geschlossene Regelkreis mit $k_p = 1$ BIBO-stabil? Begründen Sie ihre Antwort. **1 P.|**

      ii. Argumentieren Sie anhand der Ortskurve für welchen Wertebereich von $k_p > 0$ der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist. **1 P.|**

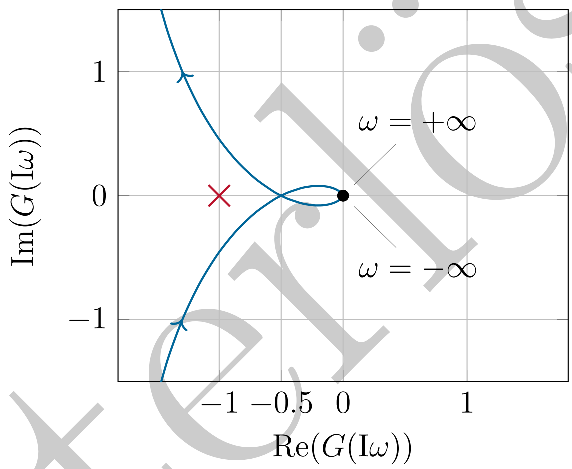


Abbildung 2: Nyquist-Ortskurve der Strecke $G(s)$.

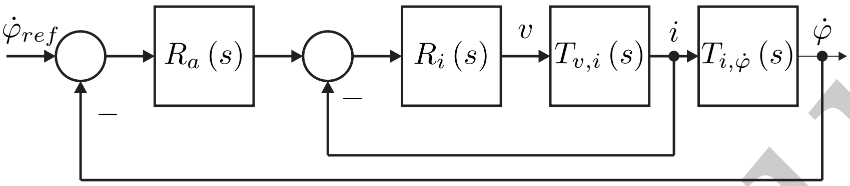
Lösung:

a)

$$T_{v,\ddot{\varphi}} = \frac{K}{Il}\frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{K^2}{Il}}$$

$$T_{v,\varphi} = \frac{K}{Ils}\frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{K^2}{Il}}$$

b) i. *Kaskadenregelung:*



ii. *Für Entwurf von $R_i(s)$ wird von der Strecke $T_{v,i}(s)$ ausgegangen.*
Für Entwurf von $R_a(s)$ wird von der Strecke $T_{i,\dot{\varphi}}(s)$ ausgegangen.

iii. *Modellunsicherheiten von $T_{v,i}(s)$ und Störungen in dem Teilsystem werden von $R_i(s)$ mit einer hohen Bandbreite ausgeregelt.*
Das führt zu einer besseren Regelgüte.

iv. *Die Durchtrittsfrequenz des inneren Regelkreises $\omega_{C,i}$ wird wesentlich höher als die Durchtrittsfrequenz des äußeren Regelkreises $\omega_{C,a}$ gewählt.*
Dadurch wirkt der innere geschlossene Regelkreis für den äußeren näherungsweise wie eine Durchschaltung und der äußere Regelkreis kann alleine unter Berücksichtigung der äußeren Teilstrecke entworfen werden.

c) i. *Der Regelkreis ist stabil. Argumentation wird mit Nyquist-Kriterium geführt. Mit der Regelverstärkung $k_p = 1$ ist die offene Streckenübertragungsfunktion die Streckenübertragungsfunktion selbst. $L(s) = G(s)$. Damit kann aus der gegebenen Ortskurve eine stetige Winkeländerung von $1 + L(s)$ von π abgelesen werden. Da die Übertragungsfunktion $G(s)$ die maximale Nenner- bzw. Zählerordnung 3 und zwei Polstellen mit negativem Realteil hat, ist die Bedingung des Nyquist-Kriteriums erfüllt.*

ii. $2 > k_p > 0$, *da sich die stetige Winkeländerung ab einer Skalierung der Ortskurve mit dem Faktor 2 ändert und damit das Nyquist-Kriterium nicht mehr erfüllt ist. Der P-Regler skaliert in diesem Fall die Ortskurve mit k_p.*

3. Die nachfolgenden Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden. **11 P.|**

a) Gegeben ist das System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 10 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

i. Ist das System vollständig erreichbar? Begründen Sie ihre Antwort. **1 P.|**

ii. Ist es mit einem Zustandsregler möglich ein stabiles Systemverhalten zu erreichen? Begründen Sie ihre Antwort. **2 P.|**

b) Entwerfen Sie für das nachfolgende System einen Dead-Beat Zustandsregler **2 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k.$$

c) Für das System **3 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = [0\ 0\ 2]\mathbf{x}_k$$

soll ein vollständiger Luenberger Beobachter so entworfen werden, dass sämtliche Eigenwerte der Beobachtungsfehlerdynamik bei $\lambda = 1/2$ liegen. Geben Sie die Differenzengleichung des Beobachters an.

d) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{100}{(s+10)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

in Abbildung 3 ein.

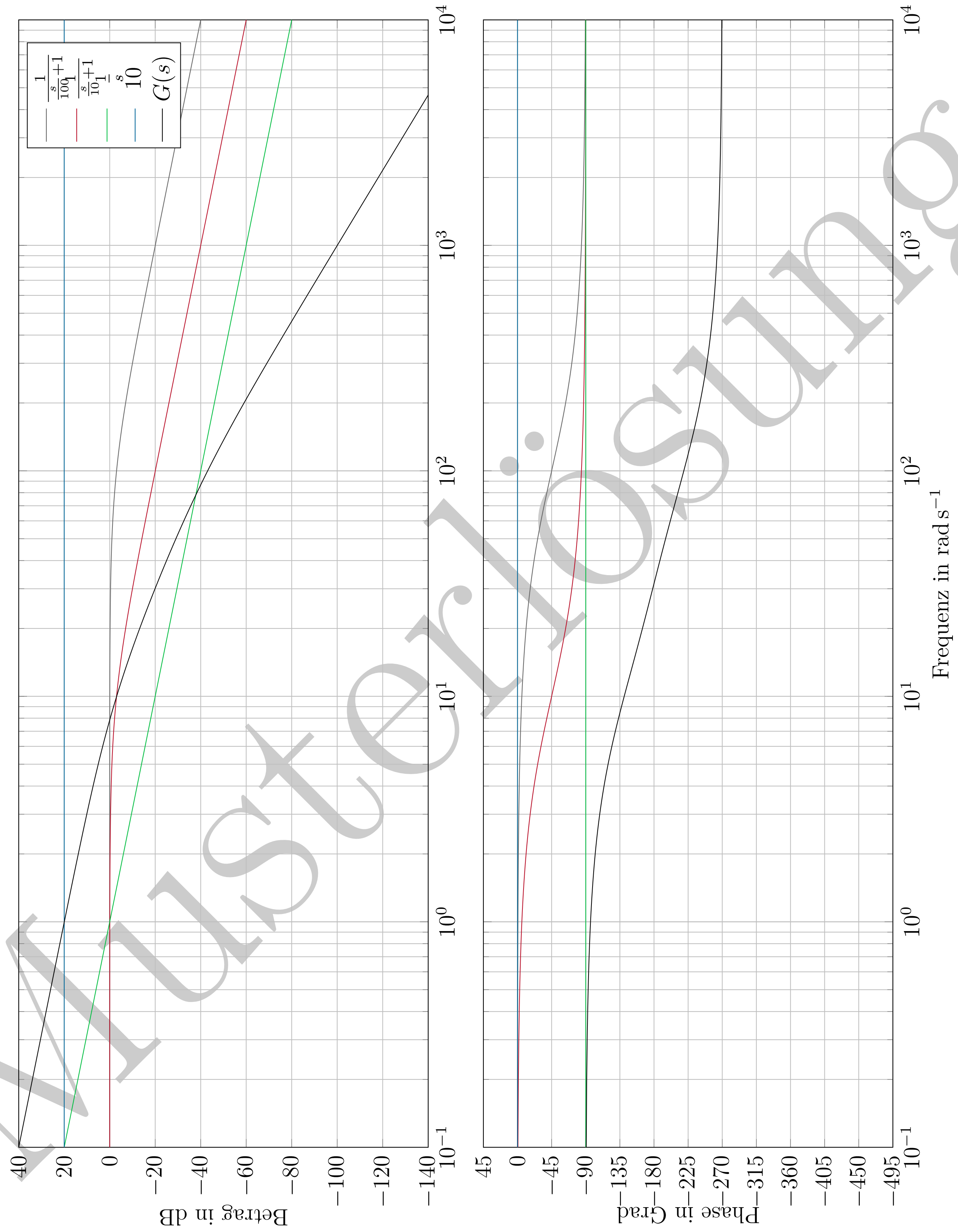


Abbildung 3: Bode-Diagramm zu Aufgabe 4

Lösung:

a) i. *System ist nicht erreichbar. Erreichbarkeitsmatrix*

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{41}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

hat nicht vollen Rang.

ii. *Ja. System ist enkoppelt. Zustände x_1 und x_3 sind erreichbar und können mit einem Relger stabilisiert werden. Zustand x_2 ist stabil.*

b)

$$u_k = [0.5 \quad -10]\mathbf{x}_k$$

c) $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \mathbf{k}^T\Big(\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}_k - y_k\Big)$ *mit* $\mathbf{k}^T = \Big[\frac{1}{16} \quad -\frac{5}{8} \quad -\frac{1}{4}\Big]$

4. Sie können die Aufgaben a) und b) unabhängig voneinander lösen. **9 P.**

a) Transformieren Sie die Übertragungsfunktion **2 P.**

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 14s + 40} \tag{6}$$

in den q-Bereich mittels der Tustin-Transformation bei einer Abtastzeit von $T_a = 0.1s$.

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G^{\#}(q) = \frac{1}{10(q+10)(q+15)} \; . \tag{7}$$

Die Abtastzeit ist $T_a = 0.01s$. Im Folgenden soll für diese Übertragungsfunktion ein PI-Regler der Form

$$R^{\#}(q) = V\frac{1 + T_I q}{q} \tag{8}$$

entworfen werden mit der Verstärkung V und der Zeitkonstanten T_I. Dafür wird das Frequenzkennlinienverfahren verwendet mit der Anstiegszeit $t_r = 0.12\,\mathrm{s}$ und einem gewünschten Überschwingen von $\ddot{u} = 10\,\%$.

i. Berechnen Sie die Zeitkonstante T_I und die Verstärkung V. Benutzen Sie dabei die Approximation $\arctan(x) = 45°x$. **3 P.**

ii. Kann der geschlossene Kreis einer Führungsfolge der Form **1 P.**

$$(r_k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \tag{9}$$

ohne bleibende Regelabweichung folgen? Begründen Sie ihre Antwort.

iii. Wie muss der Regler $R^{\#}(q)$ in Gleichung 8 erweitert werden, damit der geschlossene Kreis auf die harmonische Führungsfolge $(r_k) = (7\sin(3k))$ im eingeschwungenen Zustand eine Regelabweichung von Null aufweist? **Hinweis:** Sie müssen die Stabilität des geschlossenen Kreises für den erweiterten Regler nicht nachweisen. **3 P.**

Lösung:

a) *Die Partialbruchzerlegung mit den Polen* $p_1 = -4$ *und* $p_2 = -10$ *lautet*

$$G(s) = \frac{25}{6}\frac{1}{\frac{s}{4}+1} - \frac{5}{3}\frac{1}{\frac{s}{10}+1} \tag{10}$$

was zu

$$G(q) = \frac{25}{6}\frac{1-\frac{1}{20}q}{1+\frac{q}{A_1}} - \frac{5}{3}\frac{1-\frac{1}{20}q}{1+\frac{q}{A_2}} \tag{11}$$

führt. Die Konstanten lauten $A_1 = 20\tanh(0.2)$ *und* $A_2 = 20\tanh(0.5)$.

b) i. *Die gewünschte Grenzfrequenz und Phasenreserve ergeben sich zu*

$$\Omega_c = \frac{1.2}{t_r} = 10 \tag{12}$$

$$\Phi = 70 - \text{ü} = 60\,\text{deg}\,. \tag{13}$$

Nun wird der Winkel jedes Terms einzeln berechnet. Das führt auf

$$\angle\left(\frac{1}{q}\right) = -90\,\text{deg} \tag{14}$$

$$\angle\left(\frac{1}{q+10}\right) = -45\,\text{deg} \tag{15}$$

$$\angle\left(\frac{1}{q+15}\right) = -30\,\text{deg} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \angle(L_1(I\Omega_c)) = -90 - 45 - 30 = -165\,\text{deg} \tag{17}$$

womit die benötigte Phasenanhebung sich zu

$$\phi_{T_I} = 60 - (180 - 165) = 45\,\text{deg} \tag{18}$$

ergibt. Daraus folgt

$$T_I = 0.1\tan(45\,\text{deg}) = 0.1. \tag{19}$$

Die Verstärkung von Regler und Strecke lassen sich durch

$$\left|V\frac{1+0.1q}{q}\right| = V\frac{\sqrt{2}}{10} \tag{20}$$

$$\left|\frac{0.1}{(q+10)(q+15)}\right| = \frac{1}{500\sqrt{26}} \tag{21}$$

berechnen, wodurch sich die Gesamtverstärkung folgendermaßen bestimmen lässt

$$|L(I\Omega_c)| = V\frac{\sqrt{2}}{5000\sqrt{26}} = 1 \tag{22}$$

$$\Rightarrow V = 2500\sqrt{52}. \tag{23}$$

ii. *Ja, da es einen Integralanteil gibt.*

iii. $L = R^{\#}(q)G^{\#}(q)$ *ist der offene Kreis. Die Führungsübertragungsfunktion lässt sich dann zu*

$$T_{r,y}(q) = \frac{L}{1+L} = \frac{\frac{Z(L)}{N(L)}}{1+\frac{Z(L)}{N(L)}} = \frac{Z(L)}{N(L)+Z(L)} \tag{24}$$

bestimmen, wobei $N(\cdot)$ *und* $Z(\cdot)$ *dem Nenner und Zähler des offenen Kreises entsprechen. Da gilt* $N(L) = N(R^{\#}(q))N(G^{\#}(q))$, *kann man den Nenner des Regler so erweitern, dass die Führungsübertragungsfunktion eine Nullstelle an der gewünschten Frequenz hat. Damit folgt*

$$R^{\#}_{new} = R^{\#}\frac{1}{1+\left(\frac{q}{\Omega_0}\right)^2} \tag{25}$$

als neuer Regler. Diese Erweiterung gibt dem Regler eine ungedämpfte Resonanz an der gewünschten Frequenz. Die Verstärkung im offenen Regelkreis wird unendlich und im geschlossenen Regelkreis 1. Die Frequenz im q-Bereich berechnet sich zu

$$\Omega_0 = \frac{2}{T_a}\tan\frac{3}{T_a}\frac{T_a}{2} = 200\tan\frac{3}{2}. \tag{26}$$

Eigentlich muss man jetzt noch überprüfen ob der geschlossene Regelkreis stabil ist, da der Nenner des Reglers auch den Nenner des geschlossenen Kreises beeinflusst. Dies ist allerdings sehr aufwendig, da es ein Polynom dritter Ordnung ist und daher wird das hier nicht gefordert.