Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 11.11.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10.5	9.5	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10.5 P.**

a) Gegeben sind die folgenden Modellgleichungen: **4 P.**

$$\begin{aligned} \frac{V}{\beta}\dot{p} &= -q - \frac{\partial V}{\partial s}v \qquad \text{mit} \quad V = V_0 + \alpha s\,, \quad q = \gamma p^{\kappa}\,, \\ \dot{s} &= v\,, \\ \dot{v} &= u - \delta v\,. \end{aligned}$$

Der Eingang des Systems ist u. Der Ausgang des Systems ist $y = p$. Die Parameter V_0, α, β, γ, δ und $\kappa > 1$ sind konstant und positiv-reellwertig.

i. Geben Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und die Zustandsraumdarstellung für das nichtlineare System an. 1 P.

ii. Linearisieren Sie das nichtlineare System um die Trajektorie $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$. Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 3 P.

b) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante System **5 P.**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ b & -c & -d \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k\,, \\ y_k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k\,. \end{aligned}$$

Die Parameter a, b, c und d sind konstant und reellwertig.

Hinweis: Beachten Sie die spezielle Struktur des Systems. Die Inversion einer 3 x 3 Matrix ist nicht unbedingt erforderlich.

i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{u,y}(z)$. 2 P.

ii. Welche Bedingung müssen die Parameter erfüllen, damit das System BIBO-stabil ist? 2 P.

iii. Angenommen die Bedingung für BIBO-Stabilität ist erfüllt. Wie lautet dann der stationäre Wert des Ausgangs $\lim_{k\to\infty} y_k$ bei einem Einheitssprung des Eingangs $(u_k) = (1^k)$? 1 P.

c) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Sprungantwort $h(t)$ eines Verzögerungsglieds 1-ter Ordnung (P-T_1-Glied) an. Skizzieren Sie die Sprungantwort $h(t)$ im Zeitbereich und stellen Sie den Zusammenhang zu den beiden Parametern der Übertragungsfunktion her. **1.5 P.**

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} p & s & v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{V}(q + \alpha v) \\ v \\ u - \delta v \end{bmatrix}$$

$$y = p$$

ii.

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\,, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0$$
$$\Delta y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}$$

mit

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$
$$\Delta u = u - \tilde{u}$$
$$\Delta y = y - \tilde{y}$$

und

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & A_{13}(t) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit

$$A_{11}(t) = \left(-\frac{\beta}{V}\gamma\kappa p^{\kappa-1}\right)\Big|_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})}$$
$$A_{12}(t) = \left(\frac{\beta}{V^2}\alpha(q + \alpha v)\right)\Big|_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})}$$
$$A_{13}(t) = \left(-\frac{\beta}{V}\alpha\right)\Big|_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})}$$

b) *i.*

$$T_{u,y}(z) = \frac{b - cz}{z(z + a)(z + d)}$$

ii. *Aus der Bedingung an die Pole z_i zur BIBO-Stabilität einer diskreten Übertragungsfunktion*

$$|z_i| < 1$$

und den drei Polstellen abgelesen aus ihrem Nenner

$$z_1 = 0$$
$$z_2 = -a$$
$$z_3 = -d$$

folgt

$$|a| < 1 \;\wedge\; |d| < 1$$

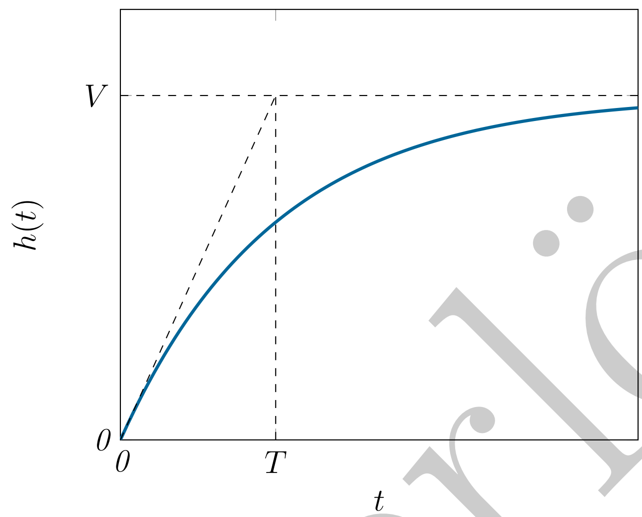
iii.

$$y_\infty = \lim_{z\to 1}((z-1)\hat{u}T_{u,y}) = \frac{b-c}{(1+a)(1+d)}$$

c)

$$G(s) = \frac{V}{1+sT} \qquad mit \quad T > 0$$
$$h(t) = V\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right)$$

Sprungantwort $h(t)$



2. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **9.5 P.|**

a) Entwerfen Sie für die Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = \frac{20}{\left(\frac{\sqrt{3}}{10}s + 1\right)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

einen PI-Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises folgende Vorgaben erfüllt:

- Überschwingen 40 % und
- Anstiegszeit $t_r = 0.15\,\mathrm{s}$.

b) Betrachten Sie den Regelkreis in Abbildung 1. **6.5 P.|**

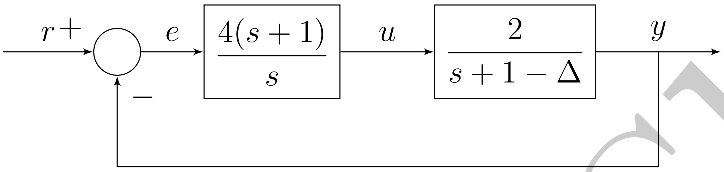


Abbildung 1: Regelkreis.

Bei den folgenden beiden Fragen gilt für den Parameter $\Delta = 0$.

i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{r,e}(s)$ sowie die bleibende Regelabweichung e_∞ nach einem Einheitssprung des Sollwerts $r(t) = \sigma(t)$. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{r,u}(s)$. Bestimmen Sie die Stellgröße im Zeitbereich $u(t)$ nach einem Einheitssprung des Sollwerts $r(t) = \sigma(t)$. 3 P.|

Im Laufe der Standzeit der Regelung verändert der Streckenpol seine Lage – für die folgenden beiden Fragen gilt nun $\Delta > 0$.

iii. Für welchen Bereich von Δ bleibt der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil? 1 P.|

iv. Für welchen Bereich von Δ kann sichergestellt werden, dass alle Pole des geschlossenen Kreises einen Realteil ≤ -1 besitzen? 1.5 P.|

Lösung:

a)

$$R(s) = \frac{V_{\mathrm{I}}(1 + sT_{\mathrm{I}})}{s} \qquad mit \quad V_{\mathrm{I}} = 1\,, \quad T_{\mathrm{I}} = \frac{1}{10}$$

b) *i.*

$$T_{r,e}(s) = \frac{s}{s+8}$$
$$e_\infty = 0$$

ii.

$$T_{r,u}(s) = \frac{4(s+1)}{s+8}$$
$$u(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\exp(-8t)\right)\sigma(t)$$

iii.

$$\Delta < 9$$

iv.

$$\Delta \leq 7$$

3. *Die Aufgaben a) - c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Leiten Sie die allgemeine Lösung eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$ mit $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ her. **3 P.|**

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen, zeitdiskreten Systems der Form **2 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k,\ \mathbf{x}_0$$

an.

c) Gegeben ist die Transitionsmatrix eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ **5 P.|**

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ \frac{21}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t} - 12e^{-2t} & -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

i. Geben Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems sowie deren Eigenwerte an. 2 P.|

ii. Gegeben ist der Zustand $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3} \end{bmatrix}$ zur Zeit $t = 1$. Berechnen Sie den Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$. 1 P.|

iii. Geben Sie einen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ und eine skalare Funktion $\alpha(t)$ derart an, dass sich die Lösung des Systems in der Form $\mathbf{x}(t) = \alpha(t)\mathbf{x}_0$ darstellt. 2 P.|

Lösung:

a) Siehe Skriptum, Beweis von Satz 2.4.

b) Siehe Skriptum, Kapitel 6.3.

c) *i.*

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \dot{\mathbf{\Phi}}(0)\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ -9 & -6 & -3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1, -2, -3.$$

ii.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 &= \mathbf{\Phi}(-1)\mathbf{x}_1\\ &= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

iii.

$$\alpha(t) = \exp(-3t)$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

4. *Die Aufgaben a) - c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Realisieren Sie mit Hilfe von Differentialgleichungen der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ einen Signalgenerator, der die Ausgangsgröße $y(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t)$, genau wie in Abbildung 2 dargestellt, liefert. Geben Sie $\mathbf{A}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{x}_0$ an. **Hinweis:** Denken Sie an die Jordansche Normalform. **3 P.|**

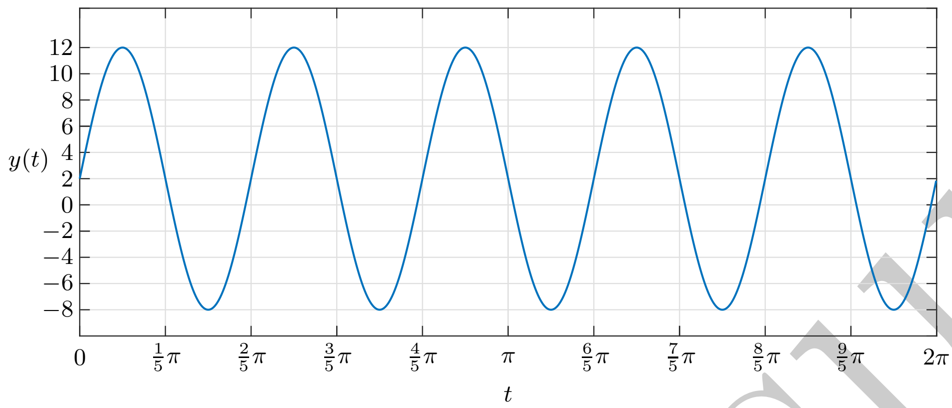


Abbildung 2: Ausgangsgröße.

b) Gegeben ist ein zeitdiskretes System in Form der Differenzengleichung **2 P.|**

$$y_k - \frac{1}{4}y_{k-1} = u_k + \frac{1}{2}u_{k-1}, \qquad y_{-1} = 0, \quad u_{-1} = 0$$

mit der Eingangsgröße u_k und der Ausgangsgröße y_k. Geben Sie zu obigem System ein System von Differenzengleichungen erster Ordnung der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \tag{3a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + du_k \tag{3b}$$

an.

c) Gegeben ist ein Abtastsystem in der Form **5 P.|**

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -\frac{1}{2}x_k - \frac{3}{2}u_k \\ y_k &= \frac{1}{3}x_k + u_k. \end{aligned}$$

i. Das Abtastsystem wird mit einem diskreten Integralregler geregelt. Wie sieht die Zustandsdarstellung des diskreten Integralreglers mit dem Regelfehler $e_k = r_k - y_k$ als Eingang und dem Ausgang u_k aus? 1 P.|

ii. Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung des mit dem Integralregler geschlossenen Kreises. Können die Eigenwerte des geschlossenen Kreises mit dem Reglerparameter k_I beliebig platziert werden? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie ein k_I an, sodass der geschlossene Kreis stabil ist. 4 P.|

Lösung:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{4}x_k + \frac{3}{4}u_k \\ y_k &= x_k + u_k \end{aligned}$$

c) *i.*

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k + e_k \\ u_k &= k_I z_k \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}k_I \\ -\frac{1}{3} & 1 - k_I \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_g} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_k$$

$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}_g) = \lambda^2 + \lambda(k_I - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \Rightarrow$ *Mit* k_I *können die EW von* $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}_g)$ *nicht beliebig platziert werden. Für* $k_I = \frac{1}{2}$ *ist der geschlossene Regelkreis stabil.*