Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 29.09.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	11	9	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **11 P.|**

   a) Gegeben ist das autonome lineare dynamische System **5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{1}$$

   Bestimmen Sie die Lösungstrajektorie $\mathbf{x}(t)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

   i. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. 1 P.|

   ii. Ist das System (1) global asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

   iii. Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t)$ und geben Sie die transformierte Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ in Jordanscher Normalform an. 1.5 P.|

   iv. Bestimmen Sie die transformierte Transitionsmatrix $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ und die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}$ des ursprünglichen Systems (1). 1.5 P.|

   v. Bestimmen Sie die Lösung des ursprünglichen Systems $\mathbf{x}(t)$ von (1). 0.5 P.|

   Hinweis: Vereinfachen Sie Ihre Lösung so weit wie möglich.

   b) Gegeben ist das zeitdiskrete System **3 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad . \tag{2}$$

   i. Welche Voraussetzung muss das System (2) erfüllen, damit durch einen Zustandsregler die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig platziert werden können? Prüfen Sie, ob das System (2) diese Eigenschaft erfüllt. 1 P.|

   ii. Entwerfen Sie für das System (2) einen Dead-Beat Regler. 2 P.|

   c) Gegeben ist das System **3 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad , \tag{3a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad . \tag{3b}$$

   i. Bestimmen Sie die s-Übertragungsfunktion des Systems (3). 1 P.|

   ii. Berechnen Sie die Sprungantwort $h(t)$ des Systems. 2 P.|

Lösung:

a) *i.* $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 + 3\lambda + 2, \qquad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

ii. *Global asymptotisch stabil: Ja, weil* $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$

iii. $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

iv. $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

$\mathbf{\Phi} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

v. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

b) *i.* $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *Da die Erreichbarkeitsmatrix* $\mathcal{R}$ *vollen Rang hat ist das System vollständig erreichbar, wodurch die Eigenwerte beliebig platziert werden können.*

ii. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) *i.* $G(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \frac{2}{(s+1)^2}$

ii. $h(t) = 2\sigma(t)(1 - (1 + t)e^{-t})$

2. *Sie können die Aufgaben a), b) und c) unabhängig voneinander lösen.* **9 P.**

a) Auf ein lineares zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ wird eine harmonische Eingangsgröße $u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$ aufgeschaltet. **3 P.**

i. Geben Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems im eingeschwungenen Zustand an. Welche Voraussetzung muss $G(s)$ dabei erfüllen? 1 P.

ii. Zeigen Sie, dass wenn die Übertragungsfunktion in der Form $G(\mathrm{I}\omega) = g_R(\omega) + \mathrm{I} g_I(\omega)$ gegeben ist, dann kann $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand für $u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$ als 2 P.

$$y(t) = A_0 g_R(\omega_0) \sin(\omega_0 t) + A_0 g_I(\omega_0) \cos(\omega_0 t) \tag{4}$$

angeschrieben werden.

Hinweis: Es gelten folgende Beziehungen:

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2\mathrm{I}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{I}\alpha}\right) \qquad \cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{I}\alpha}\right)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) In Abbildung 1 ist die Sprungantwort $h(t)$ einer Übertragungsfunktion 2-ter Ordnung dargestellt. **4 P.**

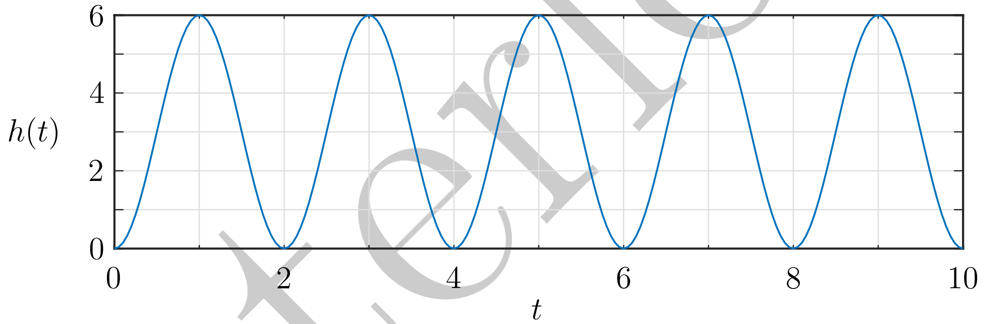


Abbildung 1: Sprungantwort einer Übertragungsfunktion 2-ter Ordnung.

i. Schreiben Sie die Sprungantwort $h(t)$ und die Impulsantwort $g(t)$ als Funktionen der Zeit t explizit an. 1 P.

ii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von $G(s)$. 2.5 P.

iii. Ist dieses System BIBO-stabil? 0.5 P.

c) Für den Regelkreis von Abbildung 2 wird ein Regler $R(s)$ so entworfen, dass die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$ die Bedingungen **2 P.**

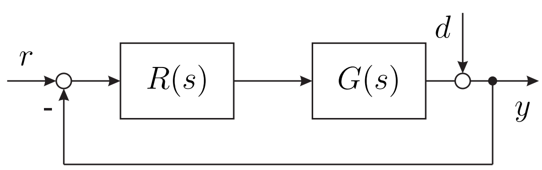


Abbildung 2: Einfacher Regelkreis.

$|L(\mathrm{I}\omega)| \ll 1$ für $\omega \gg \omega_C$ und $|L(\mathrm{I}\omega)| \gg 1$ für $\omega \ll \omega_C$ mit der Durchtrittsfrequenz ω_C erfüllt. Skizzieren Sie die typischen Betragsfrequenzgänge von $L(s)$, $T_{r,y}(s)$ und $T_{d,y}(s)$.

Lösung:

a) *i.* *$G(s)$ muss BIBO-stabil sein.*

$$y(t) = A_0|G(\mathrm{I}\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \arg(G(\mathrm{I}\omega_0)))$$

ii.

$$\begin{aligned}
y(t) &= A_0 g_R(\omega_0)\sin(\omega_0 t) + A_0 g_I(\omega_0)\cos(\omega_0 t)\\
&= A_0 g_R(\omega_0)\frac{1}{2\mathrm{I}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{I}\omega_0 t}\right) + A_0 g_I(\omega_0)\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{I}\omega_0 t}\right)\\
&= A_0 g_R(\omega_0)\frac{1}{2\mathrm{I}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{I}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{I}\varphi}\right)\\
&+ A_0 g_I(\omega_0)\frac{1}{2\mathrm{I}}\mathrm{I}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{I}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{I}\varphi}\right)\\
&= A_0(g_R(\omega_0) + \mathrm{I}g_I(\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{I}\varphi}\frac{1}{2\mathrm{I}}\mathrm{e}^{\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)}\\
&- A_0(g_R(\omega_0) - \mathrm{I}g_I(\omega_0))\mathrm{e}^{\mathrm{I}\varphi}\frac{1}{2\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)}\\
&= A_0|G(\mathrm{I}\omega_0)|\frac{1}{2\mathrm{I}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}(\arg(G(\mathrm{I}\omega_0))-\varphi)}\mathrm{e}^{\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)} - \mathrm{e}^{\mathrm{I}(-\arg(G(\mathrm{I}\omega_0))+\varphi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{I}(\omega_0 t+\varphi)}\right)\\
&\overset{\varphi=\arg(G(\mathrm{I}\omega_0))}{=} A_0|G(\mathrm{I}\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \arg(G(\mathrm{I}\omega_0)))
\end{aligned}$$

b) *i.*

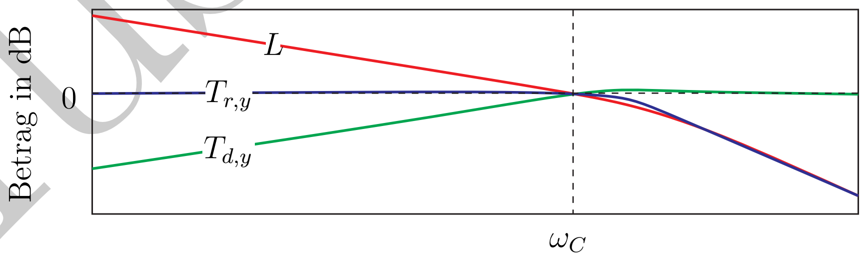
$$h(t) = 3(1-\cos(\pi t)), \quad g(t) = 3\pi\sin(\pi t)$$

ii.

$$G(s) = \frac{3}{1+(\frac{s}{\pi})^2}$$

iii. *Nein, da $g(t)$ ist nicht absolut integrabel.*

c) *Typischer Verlauf der Betragsfrequenzgänge von $L(s)$, $T_{r,y}(s)$ und $T_{d,y}(s)$.*



3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist das zeitkontinuierliche nichtlineare System **4 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \sin(\ln(x_2)) + x_2 - u \\ x_1^2 x_2 - 2x_2^2 u \end{bmatrix} \tag{5a}$$

$$y = h(\mathbf{x}) = e^{x_1 x_2} \ , \tag{5b}$$

wobei $x_1, \ x_2 > 0$ gelte.

i. Berechnen Sie die Ruhelage $\mathbf{x}_R$, y_R des Systems (5) für $u_R = 1$. 1 P.|

ii. Linearisieren Sie das System um die Ruhelage. Schreiben Sie die Variablen $\Delta\mathbf{x}$, Δu und Δy sowie die linearisierten Systemgleichungen für diese an. 3 P.|

b) Von einem zeitdiskreten, linearen, zeitinvarianten System mit der Abtastzeit $T_a = 1$s kennt man die Eingangsfolgen **6 P.|**

$$u_k^I = (1, -1, 0, 0, ...)$$
$$u_k^{II} = (0, -1, 0, 0, ...)$$

und die zugehörigen Ausgangsfolgen (mit der Eulerschen Zahl e)

$$y_k^I = (1, \sqrt{e} - 1, e - \sqrt{e}, e^{3/2} - e, ...)$$
$$y_k^{II} = (0, -1, -\sqrt{e}, -e, ...) \ .$$

i. Beurteilen Sie die BIBO-Stabilität des Systems, ohne $G(z)$ zu berechnen. 1 P.|

ii. Die z-Transformierte von y_k^I lautet 1.5 P.|

$$y_z^I(z) = \frac{z-1}{z-\sqrt{e}} \ .$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$.

iii. Es wird die Reglerübertragungsfunktion $R(z) = V, \ V > 0$ genutzt, um den Regelkreis zu schließen. Welche Bedingung muss V erfüllen, damit der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist? 1.5 P.|

iv. In einer realen Anwendung des zeitdiskreten Reglers existieren die zeitkontinuierliche Strecke $G(s)$ sowie die Störübertragunngsfunktion $G_d(s)$ mit Störsignal $d(t)$, welche auf den Ausgang $y(t)$ wirken. Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Regelkreises mit $R(z)$, der Sollfolge r_k und Analog-Digital bzw. Digital-Analog-Wandlern an den passenden Stellen. 2 P.|

Lösung:

a) *i.* $\mathbf{x}_R = [\sqrt{2}, 1]^{\mathrm{T}},\ y_R = e^{\sqrt{2}}$

ii. *Mit*

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{x} &= [x_1 - \sqrt{2}, x_2 - 1]^{\mathrm{T}} \\ \Delta u &= u - 1 \\ \Delta y &= y - e^{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x}\ ,\end{aligned}$$

wobei

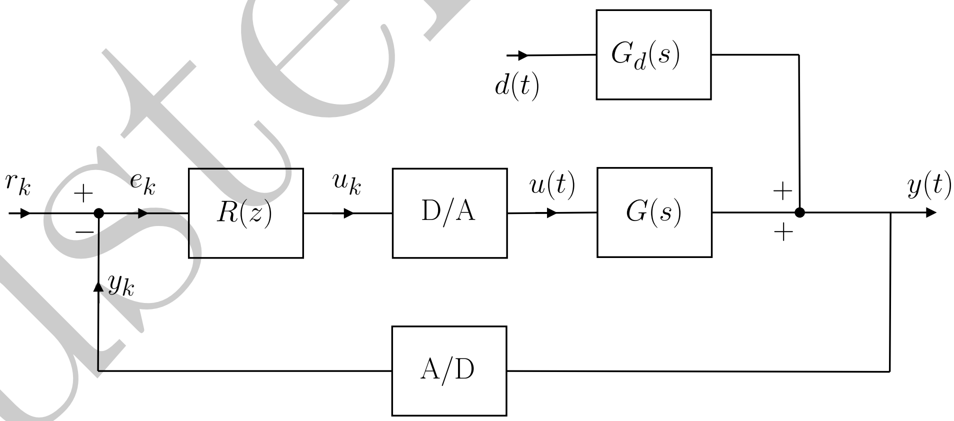
$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= [-1, -2]^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} &= [e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}]\ .\end{aligned}$$

b) *i.* *(ein mögliches Argument): nicht BIBO-stabil, da die Impulsantwortfolge* $y_k^I - y_k^{II}$ *nicht absolut summierbar ist*

ii. $G(z) = \frac{z}{z-\sqrt{e}}$

iii. $V > \sqrt{e} - 1$, *damit der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist*

iv. *Blockschaltbild:*



4. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben sind die Übertragungsfunktionen **4.5 P.|**

$$G_1(s) = \frac{s(s-4)}{2s^2+4s+\delta}\ ,\ G_2(s) = e^{-s} \tag{6a}$$

$$G_3(s) = G_1(s) + G_2(s)\ ,\ G_4(s) = G_1(s)G_2(s)\ . \tag{6b}$$

i. Beurteilen Sie die BIBO-Stabilität von $G_1(s)$ für $\delta > 0$ und $\delta < 0$. Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

ii. Setzen Sie $\delta = 8$ und skizzieren Sie die Sprungantworten $y_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ der vier Übertragungsfunktionen in (6). 4 P.|

b) Für die Strecke **4.5 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

soll ein Regler entworfen werden. Die gewünschte Anstiegzeit und das gewünschte Überschwingen sind durch $t_r = 1.5s$ und $\ddot{u} = 10\%$ gegeben. Einem rampenförmigen Signal $r(t) = t$ soll ohne bleibenden Regelfehler gefolgt werden, das heißt $e_\infty = 0$.

i. Berechnen Sie die Durchtrittsfrequenz ω_c und Phasenreserve Φ. 0.5 P.|

ii. Nutzen Sie die Reglerübertragungsfunktion 3 P.|

$$R(s) = V\frac{1+sT}{1+\eta sT}$$

und bestimmen Sie η, T und V, um den gegebenen Anforderungen zu genügen. Um welchen Regler handelt es sich hierbei?

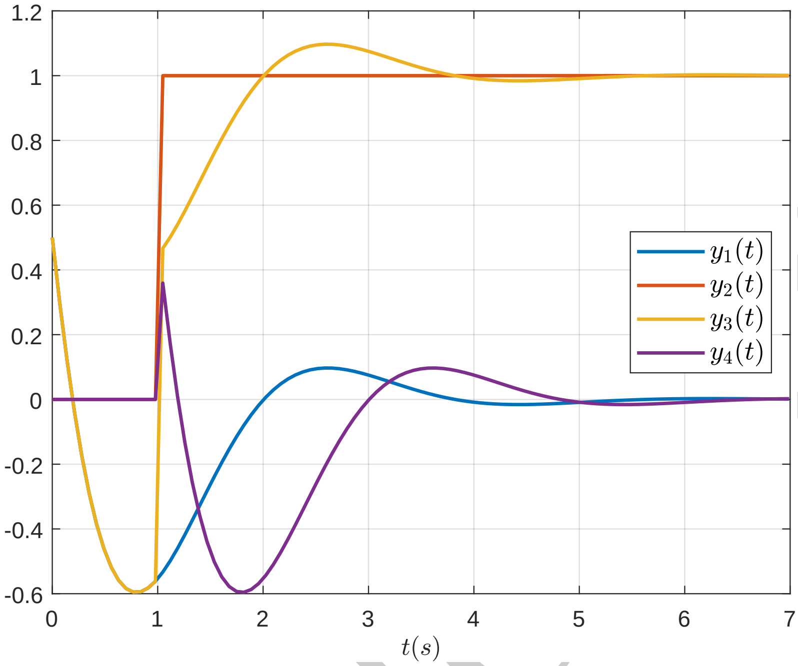
iii. Warum kann $\tilde{R}(s) = V\frac{s}{1+sT}$ nicht für diese Regelungsaufgabe eingesetzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

c) Wie hängen die Markov-Parameter mit der Impuls- oder Sprungantwort im Zeitkontinuierlichen und im Zeitdiskreten zusammen? **1 P.|**

Lösung:

a) i. *Pole:* $s = -1 \pm \sqrt{1-\delta/2}$ $\rightarrow$ *stabil für* $\delta > 0$, *instabil für* $\delta < 0$

ii. *Skizzen der vier Sprungantworten:*



b) i. $\omega_c = 1\ \mathrm{rads}^{-1}$, $\Phi = 60° = \pi/3$

ii. *arg*$(G(I\omega_c)) = -\pi$ $\rightarrow$ *Phase muss bei* ω_c *um* $60°$ *angehoben werden* $\rightarrow$ $R(s) = V\frac{1+sT}{1+\eta sT}$ *ist ein Lead-Regler mit Verstärkungsfaktor* V *und* $0 < \eta < 1$.

Reglerparameter:

$$\eta = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$$

$$V = \sqrt{\frac{1+(7-4\sqrt{3})}{1+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}}}$$

iii. $\tilde{R}(s)$ *kann nicht verwendet werden, weil* $G(s)\tilde{R}(s)$ *keinen Doppelintegrator besitzt* ($\rho = 1$ *statt* $\rho = 2$) *und daher bei einem rampenförmigen Signal* $r(t) = t$ *eine bleibende Regelabweichung besteht* ($e_\infty \neq 0$).

c) *Für die Markov-Parameter* m_k *gilt im Zeitkontinuierlichen mit der Impulsantwort* $g(t)$ *bzw. der Sprungantwort* $h(t)$

$$m_k = \left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}g(t)\right)_{t=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}t^{k}}h(t)\right)_{t=0}$$

und im Zeitdiskreten mit der Impulsantwortfolge g_k *bzw. der Sprungantwortfolge* h_k

$$g_k = m_k\ ,\ \ h_k = \sum_{l=1}^{k} m_l\ .$$