

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 10.11.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.**

a) Gegeben ist die Differentialgleichung des mathematischen Pendels **5 P.**

$$\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + c \sin(y(t)) = u(t) \quad (1)$$

mit dem Eingang $u(t)$, dem Ausgang $y(t)$ und den Konstanten $0 < b, c \in \mathbb{R}$.

- i. Geben Sie (1) als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung in Zustandsform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ an. **1 P.**
 - ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen für $u(t) = 0$ im Bereich $y_R \in [0, 2\pi)$. **1 P.**
 - iii. Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage (\mathbf{x}_R, u_R) und geben Sie die Zustandsraumdarstellung an. **2 P.**
 - iv. Überprüfen Sie anhand des linearisierten Modells, ob die Ruhelagen aus Punkt ii. asymptotisch stabil sind. **1 P.**
- b) Gegeben ist ein zeitkontinuierliches System der Form **5 P.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2a)$$

- i. Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System im neuen Zustand \mathbf{z} in Jordanscher Normalform vorliegt. Geben Sie auch die Jordansche Normalform an. **2 P.**
- ii. Bestimmen Sie die transformierte Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}$ und die Transitionsmatrix Φ des ursprünglichen Systems (2). **2 P.**
- iii. Geben Sie 4 Eigenschaften der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ an. **1 P.**

Lösung:

a) 1

i. Wähle $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$. Dann folgt

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u - bx_2 - c \sin x_1 \end{bmatrix}$$

ii. Aus $\dot{x}_1 = x_2$ folgt $x_{2,R} = 0$. Dann folgt aus der 2. Gleichung $\sin x_{1,R} = 0$ und damit $y_R = x_{1,R} \in \{0, \pi\}$.

iii.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos(x_{1,R}) & -b \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iv. Für $x_{1,R} = 0$ folgt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Die Eigenwerte erhält man aus

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$$

woraus

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

folgt. Wegen $c > 0$ gilt $b^2 - 4c < b^2$ und damit

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2} \leq 0.$$

Damit folgt $\lambda_{1,2} < 0$ und die Ruhelage $x_{1,R} = 0$ ist stabil.

Für $x_{1,R} = \pi$ gilt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & -b \end{bmatrix}$$

woraus

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

folgt. Wegen $c > 0$ gilt $b^2 + 4c > b^2$ und damit

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} > \frac{-b + \sqrt{b^2}}{2} = 0.$$

Damit ist $\lambda_1 > 0$ und die Ruhelage $x_{1,R} = \pi$ ist nicht stabil.

b) 1

i.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ii.

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\tilde{\mathbf{A}}t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$
$$\Phi(t) = \mathbf{V}\tilde{\Phi}(t)\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

iii.

$$\Phi(0) = \mathbf{E}$$
$$\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$$
$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$
$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \mathbf{A}\Phi(t)$$

2. Gegeben ist ein zeitkontinuierliches System der Form

10 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} . \quad (4b)$$

Hinweis: Die Aufgaben a)-f) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Berechnen Sie die Hankelmatrix und überprüfen Sie, ob das System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort. **1.5 P. |**
- b) Wie hängen die Markov-Parameter m_k mit der Impulsantwort bei zeitkontinuierlichen Systemen zusammen? **1 P. |**
- c) Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$ mit $\mathbf{k}^T = [k_1, k_2] \in \mathbb{R}^2$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Kreises bei $\lambda_{1,2} = -1$ liegen. **2 P. |**
- d) Kann für das System ein asymptotisch stabiler trivialer Beobachter entworfen werden? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 P. |**
- e) Schreiben Sie allgemein die Gleichungen für einen vollständigen Luenberger Beobachter für ein zeitkontinuierliches System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (5a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (5b)$$

an und leiten Sie die Fehlerdynamik her. Wählen Sie für das System (4) die Verstärkung $\hat{\mathbf{k}}^T = [\hat{k}_1, \hat{k}_2] \in \mathbb{R}^2$ so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamik bei $\lambda_{1,2} = -1$ liegen. **3 P. |**

- f) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild mit dem System (4), dem Zustandsregler und dem Luenberger Beobachter. Nutzen Sie dafür Integrator- und Verstärkungsblöcke, sowie Blöcke zur Beschreibung der Zustandsdifferentialgleichungen. Beschriften Sie die Signale u , $\dot{\mathbf{x}}$, \mathbf{x} , y , $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\dot{\mathbf{x}}}$. **1.5 P. |**

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}m_1 &= \mathbf{c}^T \mathbf{b} = 0 \\m_2 &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = 1 \\m_3 &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}[1, 1] = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Das System ist sowohl vollständig erreichbar als auch vollständig beobachtbar, weil die Hankelmatrix $\mathbf{H}[1, 1]$ regulär ist.

b) Der Markov-Parameter m_k entspricht der $(k-1)$ -ten Zeitableitung der Impulsantwort $g(t)$ and der Stelle $t = 0$, d.h.

$$\left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} g(t) \right)_{t=0} = m_k .$$

c)

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 - 1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_2 \pm \sqrt{k_2^2 + 4k_2 - 4}}{2}$$

$$\implies k_1 = 0$$

$$k_2 = -2$$

d) Nein, da das System 2 Eigenwerte auf der imaginären Achse hat und damit nicht asymptotisch stabil ist.

e) Die allgemeine Gleichung für einene zeitkontinuierlichen Luenberger Beobachter lautet

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b} u + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y} - y) \\ &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b} u + \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}) \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} + du .\end{aligned}$$

Daraus folgt die Fehlerdynamik für $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T \mathbf{e} - \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \underbrace{(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T)}_{\mathbf{A}_e} \mathbf{e} .\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A} + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & 1 \\ \hat{k}_2 - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\hat{k}_1 \pm \sqrt{\hat{k}_1^2 + 4\hat{k}_2 - 4}}{2}$$

$$\implies \hat{k}_1 = -2$$

$$\hat{k}_2 = 0$$

f)

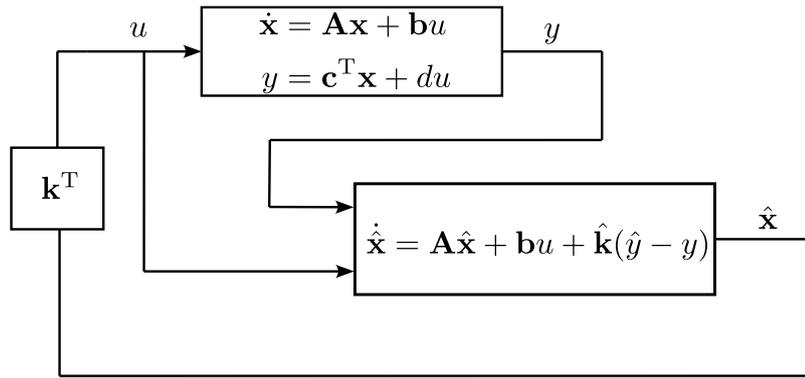


Abbildung 1: Blockschaltbild mit Strecke, Beobachter und Zustandsregler.

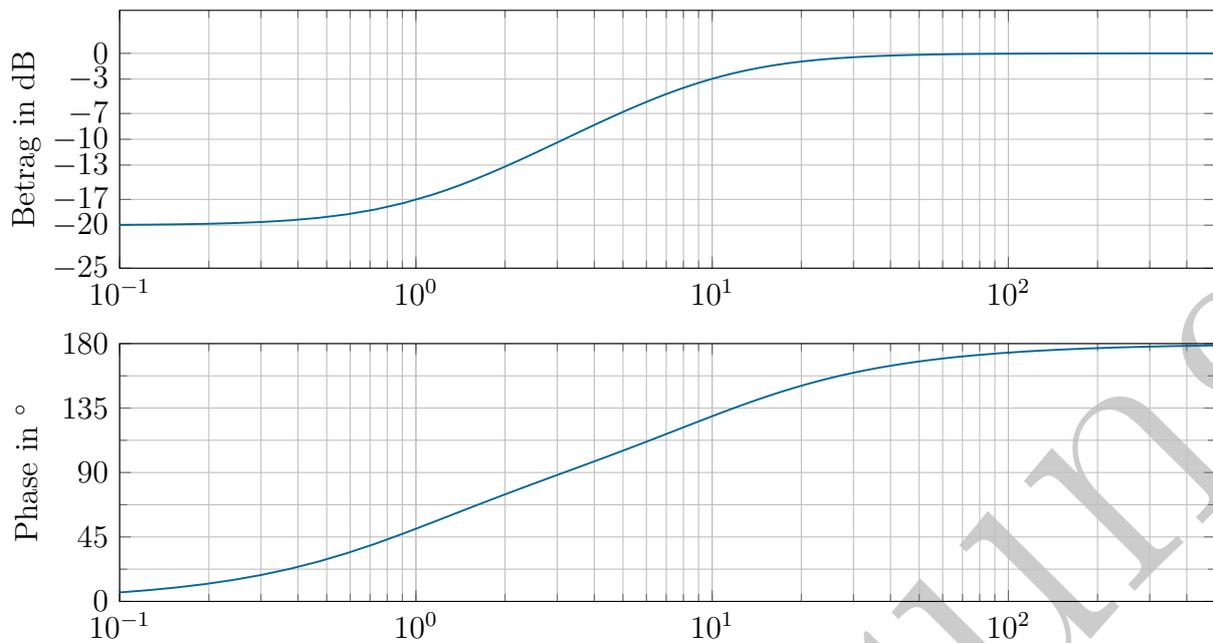


Abbildung 2: Betrags- und Phasenfrequenzgang der Übertragungsfunktion $G(s)$.

3. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 10 P. |
- a) In Abbildung 2 ist das Bodediagramm einer Strecke $G(s)$ zu sehen. 7 P. |
- i. Wie lautet die zum System zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$? Ist die Strecke BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 2.5 P. |
 - ii. Berechnen Sie nun die Parameter V_I und T_I eines PI-Regler $R(s)$ so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises $T_{r,y}(s)$ die Anforderungen $t_r = 0.15s$, $\ddot{u} = 10\%$ erfüllt. 2.5 P. |
Hinweis: Sie müssen die arctan-Funktion nicht auswerten. Es genügt, wenn Sie die Gleichungen nach V_I und T_I umformen.
 - iii. Wie lauten die Differenzgleichungen für die Implementierung eines zeitdiskreten PI-Reglers? 2 P. |
- b) In Abbildung 3 sind die Nyquist-Ortskurven der q -Übertragungsfunktionen $P_i(q)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben. 3 P. |
- i. In der Tabelle 1 ist der Grad des Zählerpolynoms $\text{grad}(z_{P_i}(q))$, der Grad des Nennerpolynoms $\text{grad}(n_{P_i}(q))$ sowie die Anzahl der Nullstellen des Nennerpolynoms in der rechten $N_+(n_{P_i}(q))$ und linken $N_-(n_{P_i}(q))$ offenen q -Halbebene der jeweiligen Übertragungsfunktion $P_i(q)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ angegeben. 1.5 P. |

$\text{grad}(z_{P_i}(q))$	$\text{grad}(n_{P_i}(q))$	$N_-(n_{P_i}(q))$	$N_+(n_{P_i}(q))$	V
2	2	0	1	0.79
1	3	3	0	0.094
2	2	2	0	-2.0

Tabelle 1: Zähler-, Nennergrad sowie Anzahl der Nullstellen des Nennerpolynoms in der linken und rechten offenen q -Halbebene der Übertragungsfunktionen $P_i(q)$.

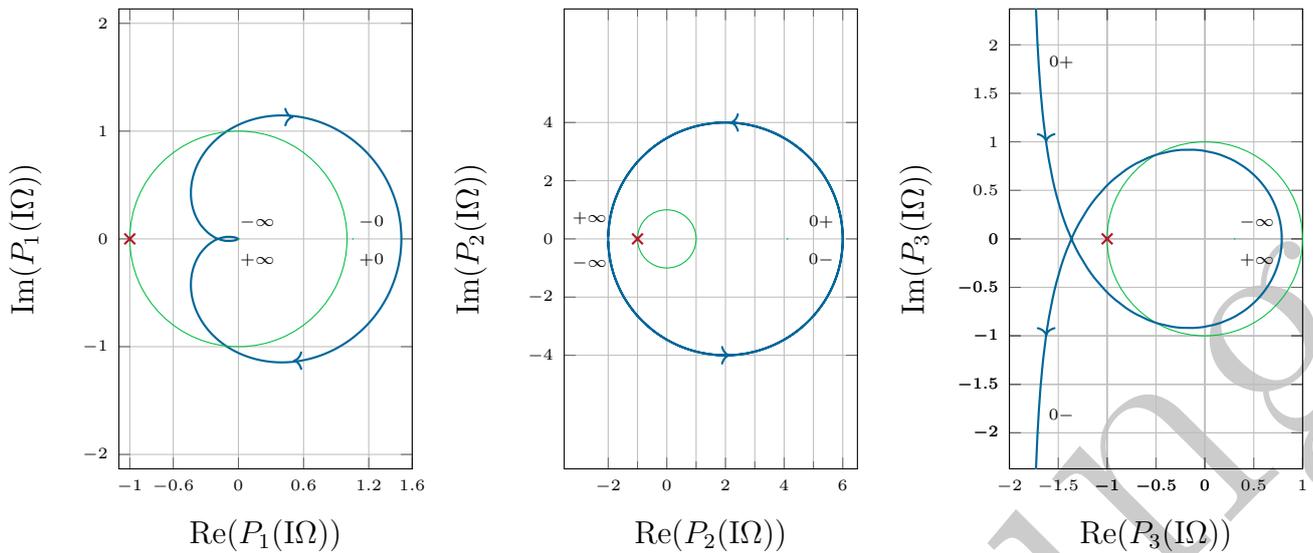


Abbildung 3: Nyquist-Ortskurven der Übertragungsfunktionen $P_i(q)$.

Ordnen Sie die q -Übertragungsfunktionen $P_i(q)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ den jeweiligen richtigen Tabelleneinträgen zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

- ii. Beurteilen Sie die BIBO-Stabilität des geschlossenen Regelkreises, wenn es sich bei den q -Übertragungsfunktionen um jene des offenen Regelkreises $L(q)$ handelt. Verwenden Sie dazu das Nyquist-Kriterium. 1.5 P.

Lösung:

a) i. $G(s) = \frac{1}{10} \frac{s+1}{1-\frac{s}{10}}$, die Stecke ist nicht BIBO-stabil

ii. Es müssen die Bedingungen

$$\omega_c = \frac{1.5}{t_r} = 10, \quad 70^\circ - \ddot{u} = 60^\circ,$$

Übertragungsfunktion eines PI-Reglers $R_{PI}(s) = V_I \frac{T_I s + 1}{s}$, es muss also gelten für den offenen Regelkreis $L(s) = R_{PI}(s)G(s)$:

$$\begin{aligned} |V_I \frac{T_I s + 1}{s} G(s)|_{s=j\omega_c} &= 1 \\ \arg\left\{ \frac{T_I s + 1}{s} G(s) \right\}_{s=j\omega_c} &= -120^\circ \end{aligned}$$

,damit die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt werden.

$$\begin{aligned} \frac{-11T_I - 0.9}{9T_I - 1.1} &= \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{(50.5T_I^2 + 50.5 \cdot 10^{-2})V_I^2}}{10} &= 1 \\ V_I &\approx 13.16 \\ T_I &\approx 0.038 \end{aligned}$$

iii. Differenzgleichungen eines PI-Reglers:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{z-1}{z} \mathbf{Z}\left(V_I \frac{T_I s + 1}{s} \frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{z-1}{z} V_I \left(\frac{zT_I}{z-1} + \frac{zT_a}{(z-1)^2} \right) = V_I \left(T_I + \frac{T_a}{z-1} \right) \\ y_{k+1} &= y_k + V_I T_I (u_{k+1}) + (V_I T_a - V_I T_I) u_k \end{aligned}$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + V_I T_a u_k \\ y_k &= x_k + V_I T_I u_k \end{aligned}$$

b) i. $P_1(q) = (ii.)$, $P_2(q) = (iii.)$, $P_3(q) = (i.)$

ii. Die Stabilität des geschlossenen Kreises kann mithilfe des Nyquist-Kriteriums aus dem Satz 4.5 des Vorlesungsskripts überprüft werden.

P_1 BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(1, 3) - 3 + 0)\pi = 0$, aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + L_1(I\omega)) = 0$

P_2 nicht BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(2, 2) - 2 + 0)\pi = 0$, aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + L_2(I\omega)) = 2\pi$

P_3 BIBO-stabil, Sollwert für stetige Winkeländerung $(\max(2, 2) - 0 + 1)\pi = 3\pi$ aus Nyquist-Diagramm $\Delta \arg(1 + L_3(I\omega)) = 3\pi$

4. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 10 P. |

a) Von verschiedenen zeitdiskreten Systemen mit der Abtastzeit $T_a = 1$ s sind die Pol-Nullstellendiagramme in Abbildung 4 gegeben. 4 P. |

i. Sind die Systeme mit den in Abbildung 4 gezeigten Pol-Nullstellendiagrammen BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P. |

ii. Ordnen Sie den Pol-Nullstellendiagrammen aus Abbildung 4 die richtigen zwei Impulsantworten der Systeme aus Abbildung 5 zu. 1 P. |

iii. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems mit dem Pol-Nullstellendiagramm von Abbildung 4 a) an. Bei der Messung am Ausgang erhält man $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0.1$, wenn als Eingang die Einheitssprungfolge gewählt wird. Dieses Verhalten soll korrekt abgebildet werden. 2 P. |

b) Wie muss die Abtastzeit eines digitalen Regelkreises gewählt werden, damit alle dynamischen Vorgänge hinreichend gut erfasst werden können? Begründen Sie Ihre Antwort! In welchen Zusammenhang steht die Wahl der Abtastzeit mit der eindeutigen Zuordnung harmonischer Schwingungen zu ihren Abtastwerten (Aliasing Effekt) ? 1.5 P. |

c) Die Übertragungsfunktion einer Strecke $G(s)$ ist mit 1.5 P. |

$$G(s) = \frac{(10 - s)}{(s - 2)(s + 3)} \quad (6)$$

gegeben. Ist es möglich, die Strecke mithilfe eines P-Reglers $R(s) = K_p$ zu stabilisieren? Falls es möglich ist, für welchen Wertebereich K_p ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Die Sprungantwort h_k eines zeitdiskreten linearen Systems ist in der Form 3 P. |

$$h_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)} \quad (7)$$

bekannt.

i. Geben Sie die z -Übertragungsfunktion $G(z)$ für das System mit der Sprungantwort h_k an. 1 P. |

Hinweis: Verwenden Sie den Verschiebungssatz der z -Transformation.

ii. Berechnen Sie die eingeschwungene Lösung für $(u_k) = 3(1^k) + 2(1^k)e^{-(k-2)} + 2 \cos(\pi k - 20^\circ)$ an. Vereinfachen Sie so weit wie möglich. 2 P. |

Lösung:

- a) i. a) Ja, alle Polstellen im Inneren des Einheitskreises b) Nein, da Pole außerhalb des Einheitskreises liegen
 ii. a) \rightarrow iii) b) \rightarrow i)
 iii.

$$G(z) = V \frac{z(z - 0.7)}{(z - 0.5)(z + 0.5 + j0.1)(z + 0.5 - j0.1)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z - 1} G(z) = 0.1$$

$$\frac{1}{V} = 10 \left(\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{100} \right)} \right); V \approx 0.38$$

- b) $\frac{\min(t_r)}{T_a} = 4 \dots 10$, Die linke offene s -Halbebene wird auf das Innere des Einheitskreises abgebildet wird. Das Frequenzspektrum des digitalen Signals ist somit π periodisch. Unter dem Aliasing-Effekt versteht man die durch diese Abbildung hervorgerufenen Fehler, wenn sich jene Frequenzanteile des ursprünglichen Signals nicht mehr eindeutig rekonstruieren lassen, welche eine Frequenz von $f > \frac{2}{T_a}$ besitzen. Diese Frequenzgrenze wird als Nyquist-Frequenz bezeichnet.
- c) Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $T_{r,y} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p(s-10)}{s^2 + (-K_p+1)s + 10K_p - 6}$
 BIBO-stabil für $\frac{6}{10} < K_p < 1$ mithilfe des Routh - Hurwitz - Theorems
- d) i. $G(z) = \frac{z-1}{(z-\frac{1}{2})z}$

ii.

$$(y_k) = 3 \left(\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z - 1} G(z) \right) + 2 |G(e^{j\pi})| \cos \left(\pi k - 20 \frac{\pi}{180} + \arg(G(e^{j\pi})) \right)$$

$$(y_k) = \frac{8}{3} \cos \left(\pi k - 20 \frac{\pi}{180} + \pi \right)$$

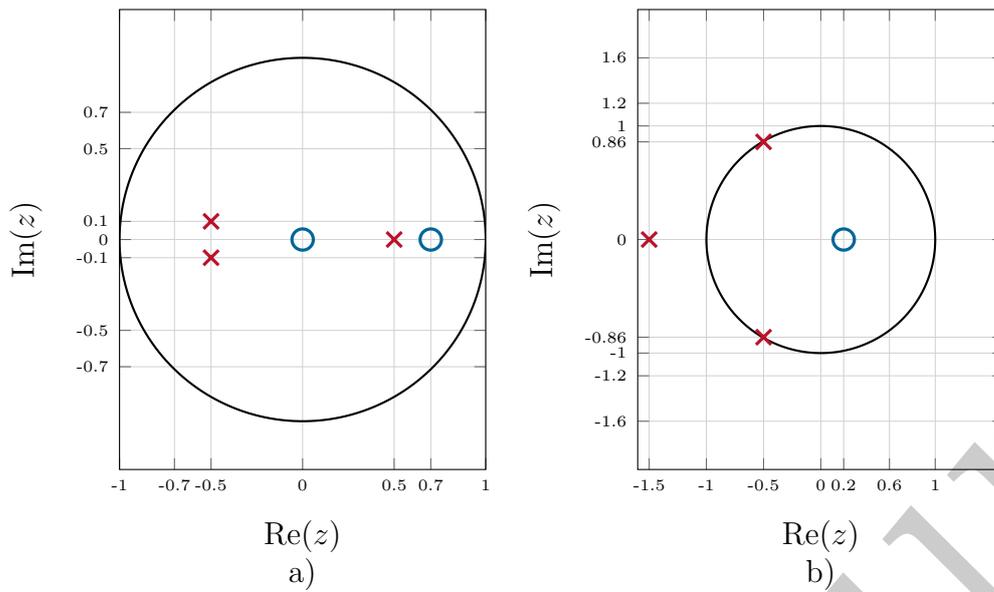


Abbildung 4: Pol-Nullstellen-Diagramm der zeitdiskreten Übertragungsfunktion.

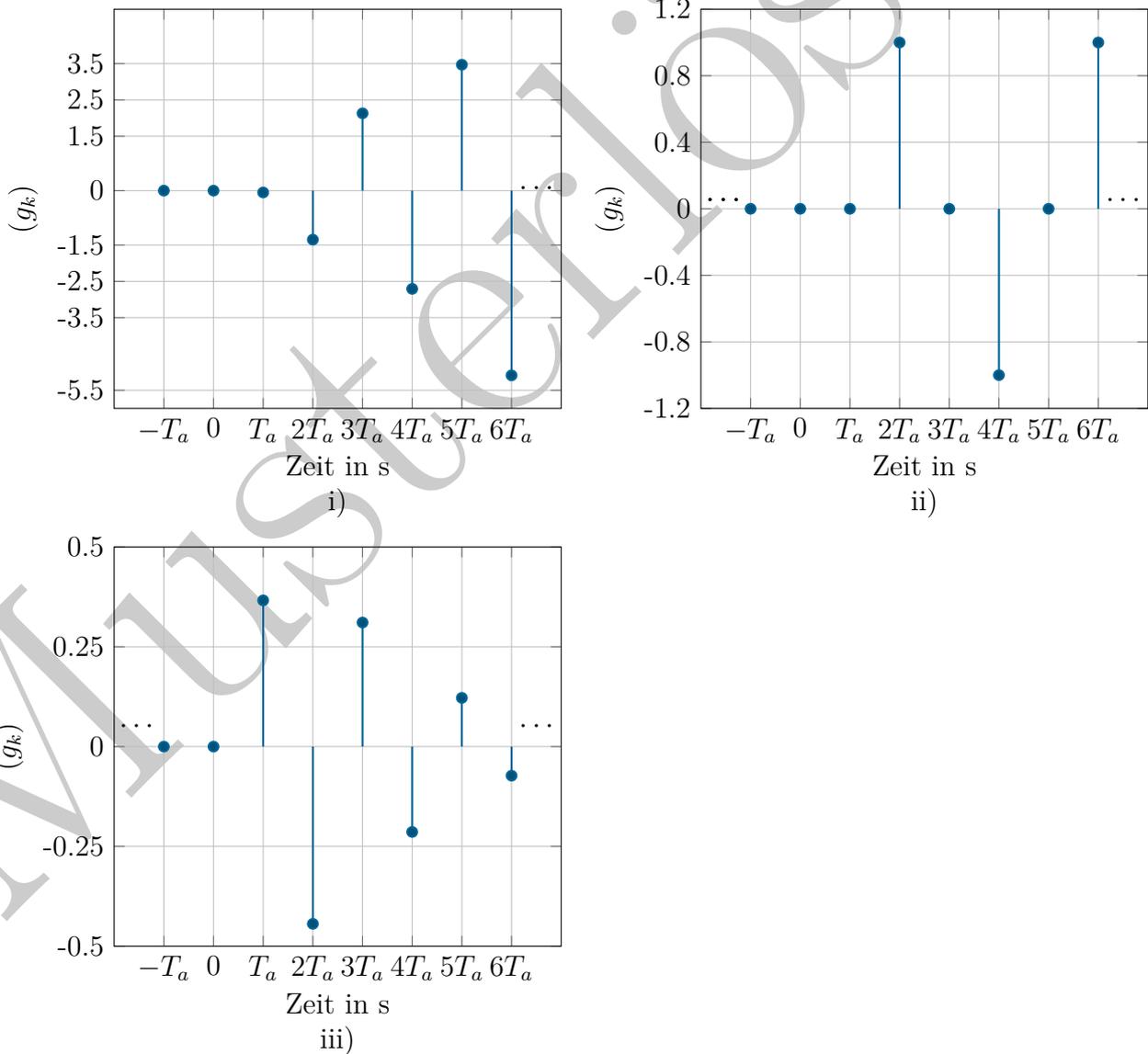


Abbildung 5: Impulsantworten.