Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 09.02.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

   a) Gegeben sind die folgenden Modellgleichungen: **5 P.|**

$$\begin{aligned}\dot{p} &= Fu - mg\sin\varphi\,,\\ \dot{\varphi} &= \left(\frac{p}{mr} - \frac{mg}{p}\right)\cos\varphi\,,\\ \dot{r} &= \frac{p}{m}\sin\varphi\,.\end{aligned}$$

   Der Eingang des Systems ist u. Der Ausgang des Systems ist $y = r$. Die Parameter $m > 0$, $g > 0$ und $F > 0$ sind konstant und reellwertig.

   i. Geben Sie den Zustandsvektor für das nichtlineare System an. 0.5 P.|

   ii. Berechnen Sie die Ruhelage des Systems für $\varphi = 0$ und $r = r_{\mathrm{R}}$, wobei für dieses System $p > 0$ und $r > 0$ angenommen werden kann. 1.5 P.|

   iii. Linearisieren Sie das nichtlineare System um die in Aufgabe ii. berechnete Ruhelage und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 3 P.|

   b) Leiten Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{x}(t)$ eines linearen, zeitinvarianten Systems **3 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

   im Zeitbereich her. Verwenden Sie dazu die Methode der Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) \quad \text{wobei} \quad \mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\,.$$

   c) Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes autonomes System **2 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,.$$

   Welche Fälle können bezüglich der Anzahl der Ruhelagen des Systems auftreten? Geben sie dabei an, wann welcher Fall eintritt. Geben Sie auch jeweils ein Beispiel für ein System 2. Ordnung an.

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p \\ \varphi \\ r \end{bmatrix}$$

ii.

$$u_\mathrm{R} = 0$$

$$\mathbf{x}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} p_\mathrm{R} \\ \varphi_\mathrm{R} \\ r_\mathrm{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\sqrt{r_\mathrm{R} g} \\ 0 \\ r_\mathrm{R} \end{bmatrix}$$

iii.

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\,, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\mathrm{R} \\ \Delta y &= \mathbf{c}^\mathrm{T}\Delta\mathbf{x} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{R} \\ \Delta u &= u - u_\mathrm{R} = u \\ \Delta y &= y - y_\mathrm{R} = y - r_\mathrm{R} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -mg & 0 \\ 2/(mr_\mathrm{R}) & 0 & -r_\mathrm{R}^{-3/2}\sqrt{g} \\ 0 & \sqrt{r_\mathrm{R} g} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) *Siehe Skriptum zur Vorlesung Automatisierung, Kapitel 2.4.*

c)
- *Fall 1: Ruhelage* $\mathbf{x}_\mathrm{R} = \mathbf{0}$, *falls Systemmatrix* $\mathbf{A}$ *regulär*

  e.g. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- *Fall 2: Unendlich viele Ruhelagen, falls* $\mathbf{A}$ *singulär*

  e.g. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Für eine zu regelnde Strecke mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ verlangt die Spezifikation an den geschlossenen Kreis eine Anstiegszeit von $t_r = 0.1$ s. Zusätzlich resultiert aus den Anforderungen eine notwendige Phasenanhebung von 30° und eine Betragsabsenkung von 10 dB im offenen Regelkreis bei der gewünschten Durchtrittsfrequenz. Zur Erfüllung der Anforderungen soll ein Regler der Form **2.5 P.|**

$$R(s) = \frac{Vs}{1+sT} \tag{5}$$

eingesetzt werden. Berechnen Sie die Reglerparameter $V > 0$ und $T > 0$.

b) Betrachten Sie den Regelkreis in Abbildung 1. **7.5 P.|**

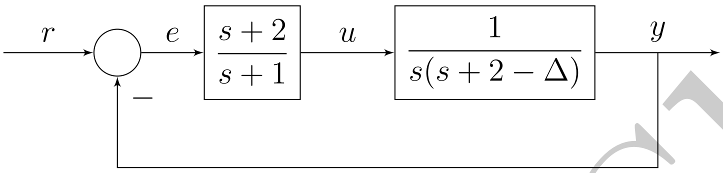

Abbildung 1: Regelkreis.

Bei den folgenden Fragen gilt für den Parameter $\Delta = 0$.

i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{r,e}(s)$. 0.5 P.|

ii. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung e_∞ für einen Einheitssprung des Sollwerts $r(t) = \sigma(t)$. 1 P.|

iii. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$. Bestimmen Sie die Ausgangsgröße im Zeitbereich $y(t)$ für einen Einheitssprung des Sollwerts $r(t) = \sigma(t)$. 3 P.|

Nun soll ein möglicher Modellfehler mitberücksichtigt werden – für die folgende Frage gilt $\Delta > 0$.

iv. Für welchen Bereich des Parameters Δ ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil? Wenden sie dazu das Routh-Hurwitz Verfahren an. 3 P.|

Lösung:

a)

$$T = \frac{\sqrt{3}}{15}$$
$$V = \frac{1}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

b) *i.*

$$T_{r,e}(s) = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+1}$$

ii.

$$e_\infty = 0$$

iii.

$$T_{r,y}(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$
$$y(t) = \sigma(t) - \mathrm{e}^{-t/2}\left(\cos(t\sqrt{3}/2) + \frac{\sin(t\sqrt{3}/2)}{\sqrt{3}}\right)\sigma(t)$$

iv.

$$\Delta < 3 - \sqrt{2}$$

3. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.**

   a) In Abbildung 2 ist das Pol-Nullstellen Diagramm eines zeitdiskreten Systems dargestellt, wobei alle Polstellen × und Nullstellen ○ einfach sind. **5 P.**

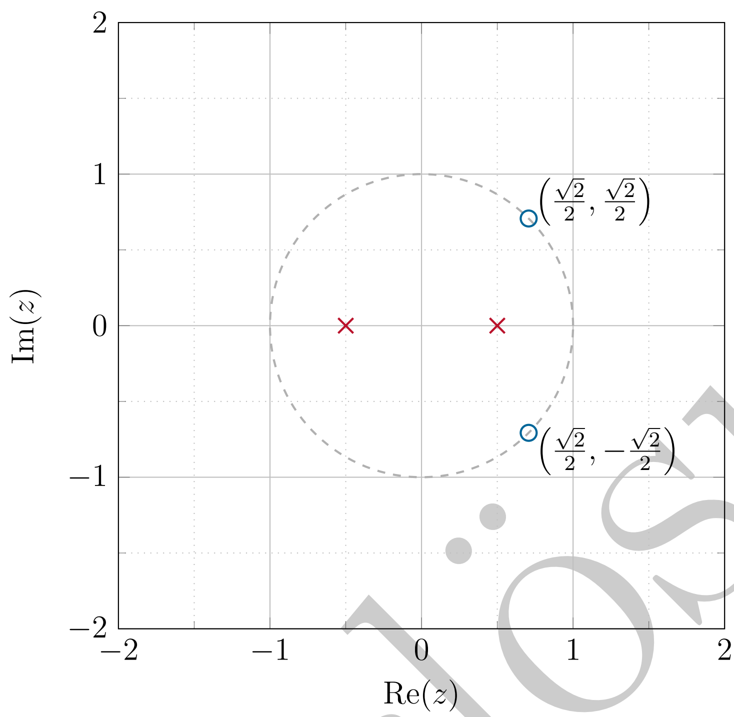

Abbildung 2: Pol-Nullstellen Diagramm.

   i. Bestimmen Sie die zugehörige z-Übertragungsfunktion $G(z)$ und wählen Sie die Verstärkung so, dass $\lim_{k\to\infty} y_k = 2 - \sqrt{2}$ für $(u_k) = (1, 1, ...)$ gilt. 2 P.

   ii. Ist das gegebene zeitdiskrete System BIBO-stabil? Ist es sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antworten. 1 P.

   iii. Es wird die Folge $(u_k) = (3\sin(\omega_0 k T_a + \frac{\pi}{8}))$ mit einer Abtastzeit $T_a = \frac{1}{4}$ am Eingang des Systems angelegt. Für welche Kreisfrequenz $\omega_0 > 0$ wird die Amplitude am Ausgang im eingeschwungenen Zustand zu 0? 2 P.

   b) Gegeben ist das autonome System **5 P.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{a^2}{4} - a - 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{6}$$

   i. Für welchen Wertebereich von $a \in \mathbb{R}$ ist die Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des Systems (6) asymptotisch stabil? 2 P.

   ii. Bestimmen Sie das Abtastsystem zu (6) mit $a = -2$ und der Abtastzeit $T_a = \pi$. Kann das Abtastsystem durch ungünstige Wahl von $T_a > 0$ instabil werden? Wenn ja, geben Sie ein T_a an für das dies gilt. Begründen Sie ihre Antwort. 3 P.

Lösung:

a) i. *Die gesuchte z-Übertragungsfunktion lautet*

$$G(z) = \frac{3}{4}\frac{z^2 - \sqrt{2}z + 1}{z^2 - 1/4} \ .$$

ii. - *Das gegebene System ist BIBO-stabil, da alle Pole im offenen Inneren des Einheitskreises liegen.*
- *Das gegebene System ist sprungfähig, da* $\lim_{z\to\infty} G(z) \neq 0$ *gilt, bzw. weil der Zähler- und der Nennergrad von* $G(z)$ *gleich sind.*

iii. *Im eingeschwungenen Zustand gilt* $(y_k) = 3|G(e^{I\omega_0 T_a})|\sin\Big(\omega_0 k T_a + \frac{\pi}{8} + \arg(G(e^{I\omega_0 T_a}))\Big)$. *Somit muss* $|G(e^{I\omega_0 T_a})| = 0$ *gelten.*
Die Nullstellen von $G(z)$ *liegen bei* $z_{n_{1,2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm I\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(siehe Abb.2). Es muss somit* $e^{I\omega_0 T_a} = \cos(\omega_0 T_a) + I\sin(\omega_0 T_a) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm I\frac{\sqrt{2}}{2}$ *erfüllt sein. Laut Formelsammlung erhält man (unter Beschränkung auf* $\omega_0 > 0$*)*

$$\omega_0 T_a = \frac{\pi}{4} \ \textit{und folglich} \ \omega_0 = \pi \ .$$

b) i. *Die Eigenwerte des autonomen Systems sind die Lösungen der Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2 + \lambda(2-a) + \frac{a^2}{4} - a + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

und lauten

$$\lambda_{1,2} = -\frac{2-a}{2} \pm I \ .$$

Asymptotische Stabilität liegt für $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ *vor, woraus die Bedingung*

$$a < 2$$

folgt.

ii. *Für* $a = -2$ *lautet die Dynamikmatrix*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

und liegt bereits in Jordanscher Normalform mit $\alpha_1 = -2$ *und* $\beta_1 = -1$ *vor (siehe Formelsammlung). Die zugehörige Transitionsmatrix lautet*

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos(t) & -e^{-2t}\sin(t) \\ e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) \end{bmatrix} .$$

Das Abtastsystem lautet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{\Phi} = \exp(\mathbf{A}T_a) = \mathbf{\Phi}(T_a) = \begin{bmatrix} -e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi} \end{bmatrix}$$

Nein, ein stabiles zeitkontinuierliches System kann durch Abtastung nicht destabilisiert werden, da die Pole s_j *der linken offenen* $s-$*Halbebene laut* $z_j = \exp(s_j T_a)$ *auf Pole* z_j *im offenen Inneren des Einheitskreises der z-Ebene abgebildet werden.*

4. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10 P.|**

a) Gegeben ist das lineare, zeitdiskrete System **4 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7a}$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{7b}$$

i. Zeigen Sie, dass das System (7) nicht vollständig erreichbar ist. Zerlegen Sie das System in das nicht erreichbare Teilsystem der Form 3 P.|

$$\mathbf{x}^{\mathrm{ne}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{ne}} \mathbf{x}^{\mathrm{ne}}_k$$

und das erreichbare Teilsystem der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\mathrm{e}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}^{\mathrm{e}} \mathbf{x}^{\mathrm{e}}_k + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{e}} u_k + \mathbf{R} \mathbf{x}^{\mathrm{ne}}_k \\ y_k &= (\mathbf{c}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}} \mathbf{x}^{\mathrm{e}}_k + (\mathbf{c}^{\mathrm{ne}})^{\mathrm{T}} \mathbf{x}^{\mathrm{ne}}_k . \end{aligned}$$

ii. Ist es möglich für das nicht erreichbare Teilsystem einen trivialen Beobachter zu entwerfen? Begründen Sie ihre Antwort! 1 P.|

b) Entwerfen Sie einen vollständigen Luenberger Beobachter für das System **3 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u_k, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{8a}$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{8b}$$

i. In welcher besonderen Form liegt das System (8) vor? 0.5 P.|

ii. Geben Sie die allgemeinen Zustandsgleichungen des Beobachters und des Beobachtungsfehlers an. Bestimmen Sie den Beobachter so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ liegen. 2.5 P.|

c) Gegeben ist die zeitdiskrete Strecke erster Ordnung **3 P.|**

$$x_{k+1} = \phi x_k + \gamma u_k \tag{9a}$$

$$y_k = c x_k + d u_k, \tag{9b}$$

mit $\phi, \gamma, c, d \in \mathbb{R}$. Diese soll mithilfe eines zeitdiskreten Integralreglers geregelt werden.

i. Wie sieht die Zustandsdarstellung eines zeitdiskreten Integralreglers mit dem Regelfehler $e_k = r_k - y_k$ als Eingang, dem Ausgang u_k und einer allgemeinen Verstärkung k_{I} aus? 1 P.|

ii. Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung des geschlossenen Kreises bestehend aus der Strecke (9) und dem Integralregler. 2 P.|

Lösung:

a) i. *Die Erreichbarkeitsmatrix lautet*

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} .$$

Die Erreichbarkeitsmatrix hat nicht vollen Rang $(\det(\mathcal{O}) = 0)$ *und somit ist das System* (7) *nicht vollständig erreichbar.*

Das nicht erreichbare Teilsystem lautet

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{ne}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{ne}} \mathbf{x}_k^{\mathrm{ne}}$$

mit

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{ne}} = -3/4 .$$

Das erreichbare Teilsystem lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{\mathrm{e}} &= \mathbf{\Phi}^{\mathrm{e}} \mathbf{x}_k^{\mathrm{e}} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{e}} u_k + \mathbf{R}\mathbf{x}_k^{\mathrm{ne}} \\ y_k &= (\mathbf{c}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k^{\mathrm{e}} + (\mathbf{c}^{\mathrm{ne}})^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k^{\mathrm{ne}} \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},\ \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ (\mathbf{c}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{0}{2} \end{bmatrix} \textit{ und } d = 0 \ .$$

ii. *Ja, denn der Eigenwert der Dynamikmatrix* $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{ne}}$ *ist* $\lambda = -3/4$ *und somit ist das nicht erreichbare Teilsystem stabil.*

b) i. *Das System* (8) *liegt in Beobachtbarkeitsnormalform vor.*

ii. *Die allgemeine Zustandsgleichung des Beobachters lautet*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma} u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \qquad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_k + d u_k \ . \end{aligned}$$

Die allgemeine Zustandsgleichung des Beobachtungsfehlers lautet

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}})\, \mathbf{e}_k = \mathbf{\Phi}_e\, \mathbf{e}_k \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0,$$

mit der Dynamikmatrix des Schätzfehlers

$$\mathbf{\Phi}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\hat{k}_1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{8} + 2\hat{k}_2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} + 2\hat{k}_3 \end{bmatrix} .$$

Da das System in Beobachtbarkeitsnormalform vorliegt, können die Koeffizienten des zu $\mathbf{\Phi}_e$ *zugehörigen Polynoms direkt aus der letzten Spalte von* $\mathbf{\Phi}_e$ *abgelesen werden. Vergleich mit den Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms*

$$p_{\mathrm{soll}}(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^3 = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{8}$$

ergibt

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/4 \\ 5/2 \end{bmatrix}.$$

c) *i.*

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I},k+1} &= x_{\mathrm{I},k} + k_{\mathrm{I}} e_k = x_{\mathrm{I},k} + k_{\mathrm{I}}(r_k - y_k) \\ u_k &= x_{\mathrm{I},k}. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{\mathrm{I},k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi & \gamma \\ -k_{\mathrm{I}} c & 1 - k_{\mathrm{I}} d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{\mathrm{I},k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\mathrm{I}} \end{bmatrix} r_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{\mathrm{I},k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$