Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur VU Automatisierung am 05.04.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	9	11	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Für ein zeitkontinuierliches System ist die Differentialgleichung **9 P.|**

$$-2\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) = 4y(t) - 6u(t)\ , \qquad y(0) = y_0\ ,\ \dot{y}(0) \ = \dot{y}_0 \tag{1}$$

mit dem Eingang $u(t)$ und dem Ausgang $y(t)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Zustandsdarstellung 2 P.|

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u\,, \quad \mathbf{x}_0\\ y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

des Systems (1).

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems (1) an. 1.5 P.|

c) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die eingeschwungene Lösung für $u(t) = e^{-3t} + 10e^{-t} + \sin(t - 30°)$ ein um $-90°$ phasenverschobenes Sinussignal ist. Welche Anforderung muss das System (1) erfüllen? 2.5 P.|

d) Bestimmen Sie für einen Eingang $u = ky$ die Parameter a und k allgemein so, dass das System (1) asymptotisch stabil ist und zwei gleiche reelle Polstellen besitzt. 2 P.|

e) Untersuchen Sie das System (1) auf die nachfolgenden Eigenschaften, geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Antworten: 1 P.|

   i. Sprungfähigkeit

   ii. Realisierbarkeit

Lösung:

a)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} \\
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2}a \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

b) $G(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{3}{s^2 - \frac{1}{2}as + 2}$

c)

$$
\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{\frac{3}{2}a}{3}\right) &= -60^\circ \\
\Rightarrow a &= -2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

d) Polstellen sind

$$
s_{1,2} = \frac{1}{4}a \pm \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + 3k - 2}
$$

und für reelle, asymptotisch stabile und gleiche Pole muss gelten

$$
\begin{aligned}
a &< 0 \\
k &= \frac{2}{3} - \frac{1}{48}a^2
\end{aligned}
$$

e) i. *Nein, da* $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$

ii. *Ja, da Zählergrad < Nennergrad*

2. Gegeben ist die Übertragungsfunktion **11 P.**

$$G(s) = \frac{1}{s(s+10)} \;, \tag{2}$$

welche mittels eines Reglers der Form

$$R(s) = V\frac{1+sT}{1+s\eta T} \tag{3}$$

geregelt werden soll.

a) Bestimmen Sie V, T und η so, dass die Anstiegszeit $t_r = 0.15\,\mathrm{s}$ und die Phasenreserve $\phi = 75°$ beträgt. Um welchen Regler handelt es sich bei $R(s)$? 4 P.

b) Zeichnen Sie die Betrags- und Phasenkennlinien des Reglers $R(s)$, der Strecke $G(s)$ und des offenen Kreises in das Bodediagramm ein. 3 P.

c) Skizzieren Sie die Sprungantwort der Reglerübertragungsfunktion $R(s)$ und zeichnen Sie bzw. geben Sie an, wie Sie V, T und η aus der Sprungantwort ermitteln können. 2 P.

d) Kann der geschlossene Kreis Eingängen der Form $r(t) = \sigma(t)$ und $r(t) = t$ ohne bleibende Regelabweichung folgen? Begründen Sie ihre Antwort. Wenn dies nicht der Fall ist, erklären Sie, wie man den Regler $R(s)$ erweitern müsste, damit keine bleibende Regelabweichung auftritt. 2 P.

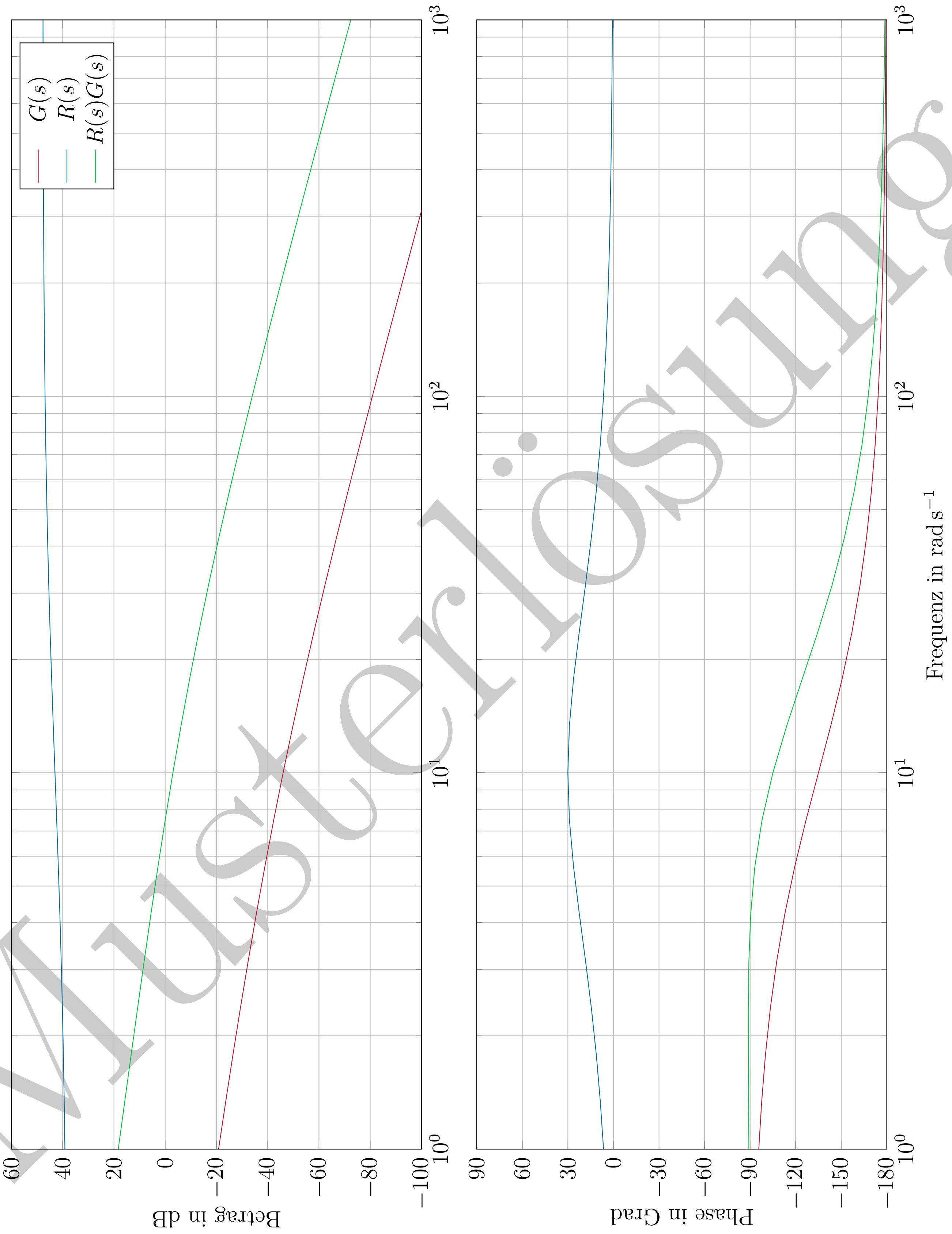


Abbildung 1: Bode-Diagramm zu Aufgabe 2

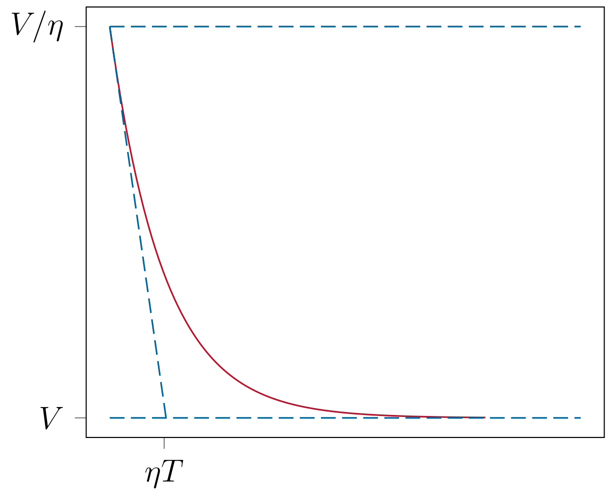


Abbildung 2: Sprungantwort der Reglerübertragungsfunktion $R(s)$

Lösung:

a) *Es handelt sich um ein Lead-Glied. Die Parameter ergeben sich zu*

$$\omega_c = \frac{1.5}{t_r} = 10$$
$$\eta = \frac{1}{3} \text{ (Phasenanhebung um } 30^\circ\text{)}$$
$$T = \frac{1}{\sqrt{\eta}\omega_c} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$
$$V = \frac{1}{|L(10I)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}100$$

b) *siehe Bodediagramm*

c) *Siehe Abbildung 2*

d) *Er kann Eingängen der Form $r(t) = \sigma(t)$ ohne bleibende Regelabweichung folgen aber für Eingänge der Form $r(t) = t$ muss man dem Regler $R(s)$ einen Integralanteil hinzufügen.*

3. *Sie können die Aufgaben a) und b) unabhängig voneinander lösen.* **10 P.|**

a) Gegeben ist ein einfacher Regelkreis von Abbildung 3. Für den Regler $R(s)$ soll **6 P.|**

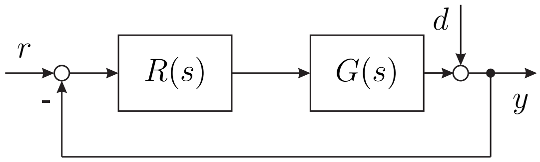


Abbildung 3: Einfacher Regelkreis.

ein Proportional-Differential-Integral-Glied (PID-Glied) verwendet werden.

i. Geben Sie eine realisierbare Übertragungsfunktion $R(s)$ des PID-Gliedes an. 1 P.|

ii. Zeichnen Sie das Strukturschaltbild des PID-Gliedes $R(s)$. Nutzen Sie dafür die in Abbildung 4 dargestellten gängigen Symbole. 2 P.|

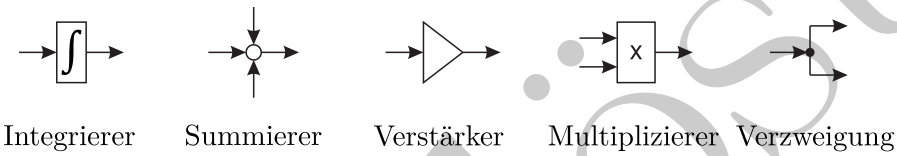


Abbildung 4: Einige wesentliche Blöcke für Strukturschaltbilder.

iii. Nehmen Sie nun an, dass der Regler $R(s)$ so entworfen wurde, dass die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$ die Bedingungen $|L(\mathrm{I}\omega)| \ll 1$ für $\omega \gg \omega_C$ und $|L(\mathrm{I}\omega)| \gg 1$ für $\omega \ll \omega_C$ mit der Durchtrittsfrequenz ω_C erfüllt. Skizzieren Sie die typischen Betragsfrequenzgänge von $L(s)$, $T_{r,y}(s)$ und $T_{d,y}(s)$. 3 P.|

b) In Abbildung 5 ist die Sprungantwort $h(t)$ einer Übertragungsfunktion 2-ter Ordnung dargestellt. **4 P.|**

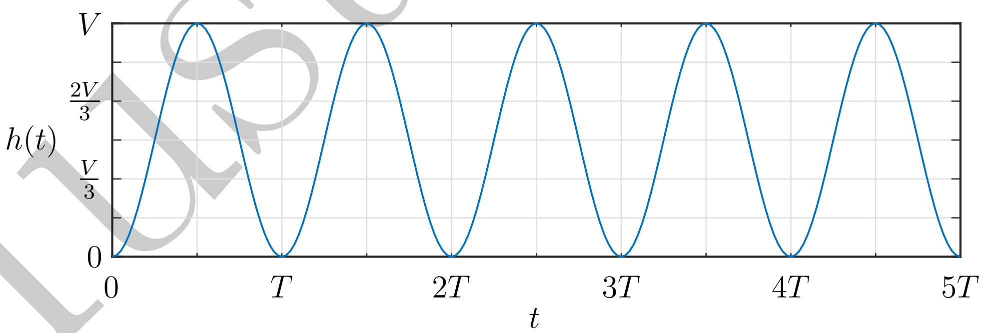


Abbildung 5: Sprungantwort einer Übertragungsfunktion 2-ter Ordnung.

i. Schreiben Sie die Sprungantwort $h(t)$ als Funktionen der Zeit t explizit an. 2 P.|

ii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von $G(s)$. 1.5 P.|

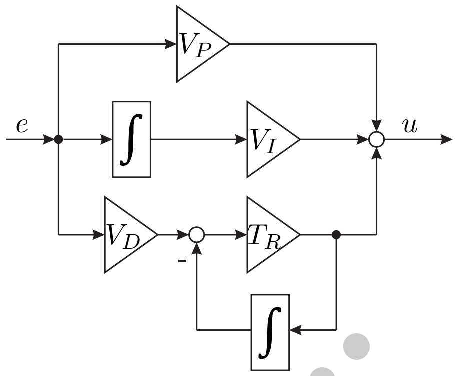
iii. Ist dieses System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

Lösung:

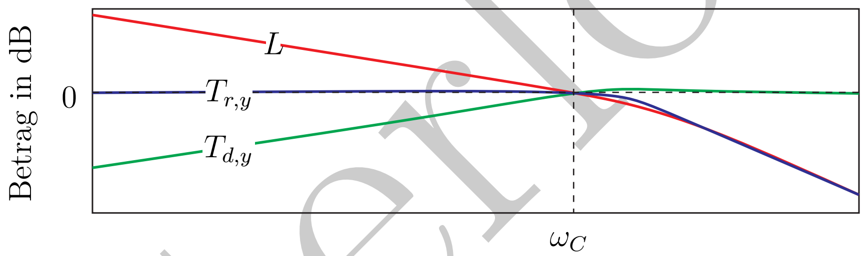
a) i. *Die Übertragungsfunktion $R(s)$ eines PID-Gliedes lautet*

$$R(s) = V_P + \frac{V_I}{s} + \frac{V_D s}{1 + T_R s}.$$

ii. *Strukturschaltbild des PID-Gliedes $R(s)$*



iii. *Betragsfrequenzgänge von $L(s)$, $T_{r,y}(s)$ und $T_{d,y}(s)$*



b) i. *Die Sprungantwort $h(t)$ lautet*

$$h(t) = \frac{V}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)\sigma(t).$$

ii. *Die Übertragungsfunktion $G(s)$ ergibt sich zu*

$$G(s) = \frac{V}{2}\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

iii. *Nein, da die Impulsantwort $g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)$ des Systems nicht absolut integrabel ist.*

4. *Sie können die Aufgaben a), b) und c) unabhängig voneinander lösen.* **10 P.**|

a) Ein vollständiger Luenberger-Beobachter wurde so entwickelt, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix sich zu $\lambda_1 = 3/4$ und $\lambda_2 = 5/7$ ergeben. Die Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{V}\mathbf{e}_k$ erfolgt über die Transformationsmatrix $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ mit $\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} = [0\ 1]$ und $\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}} = [3\ 1]$. Wie hoch darf die Störung d_0 des Systems $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \mathbf{\Gamma}_d d_k$ mit $(d_k) = d_0(1)^k$ und $\mathbf{\Gamma}_d^{\mathrm{T}} = [1\ 1]$ sein, damit für den stationären Beobachtungsfehler $\mathbf{e}_\infty^{\mathrm{T}} = [e_{\infty,1}\ e_{\infty,2}]$ jeder Eintrag betraglich kleiner 1 ist, d.h. $|e_{\infty,1}| < 1$ und $|e_{\infty,2}| < 1$. **4 P.**|

b) Zeigen Sie allgemein die Gültigkeit des Separationsprinzips für lineare, zeitinvariante Abtastsysteme. **2.5 P.**|

c) Betrachten Sie die folgenden zeitkontinuierliche LTI-Systeme **3.5 P.**|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

mit dem Zustand $\mathbf{x}$ und dem Eingang u. Beurteilen Sie, für welches System das zugehörige exakte Abtastsystem mit einer Abtastzeit T_a genau gleich einem Differenzengleichungssystem nach dem expliziten Eulerverfahren entspricht. Gehen Sie dabei wie folgt.

i. Bestimmen Sie die zugehörigen exakten Abtastsysteme. 2 P.|

ii. Bestimmen Sie das Differenzengleichungssystem nach dem expliziten Eulerverfahren. Geben Sie für jedes LTI-System die Dynamikmatrix $\mathbf{\Phi}_E$ und den Eingangsvektor $\mathbf{\Gamma}_E$ des zugehörigen zeitdiskreten Systems an. 1.5 P.|

Hinweis: Das Differenzengleichungssystem nach dem expliziten Eulerverfahren zu einem System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ lautet $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_a\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, kT_a)$ mit der Abtastzeit T_a.

Lösung:

a) $|d_0| < \frac{1}{4}$

b) *Kombiniert wird für ein vollständig erreichbares und vollständig beobachtbares LTI-Abtastsystem der Form*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x}_k \end{aligned}$$

ein Zustandsregler $u_k = \mathbf{k}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{x}}_k$ *mit einem Zustandsbeobachter*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{x}}_k, \end{aligned}$$

so ergibt sich für den geschlossenen Kreis ein Differenzengleichungssystem im Zustand $\bar{\mathbf{x}}_k^\mathrm{T} = [\mathbf{x}_k^\mathrm{T} \ \mathbf{e}_k^\mathrm{T}]$ *mit* $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ *der Form*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T} & \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\mathrm{T} \end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\mathrm{T} & \mathbf{0}^\mathrm{T} \end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_k. \end{aligned}$$

Wegen der Blockdiagonalstruktur der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises berechnet sich das charakteristische Polynom $p_{ges}(z)$ *des geschlossenen Kreises zu*

$$\begin{aligned} p_{ges}(z) &= \det\Big(z\mathbf{E} - \big(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\mathrm{T}\big)\Big)\det\Big(z\mathbf{E} - \big(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^\mathrm{T}\big)\Big) \\ &= p_{g,soll}(z)\hat{p}_{g,soll}(z) \end{aligned}$$

mit den gewünschten charakteristischen Polynomen $p_{g,soll}(z)$ *für den Zustandsreglerentwurf und* $\hat{p}_{g,soll}(z)$ *für den Zustandsbeobachterentwurf.*

c) i. *Die zugehörigen exakten Abtastsysteme lauten*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} T_a + T_a^2 \\ 2T_a \end{bmatrix}u_k, \qquad \mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ T_a \end{bmatrix}u_k.$$

ii. *Die zugehörigen Abtastsysteme nach Eulerverfahren lauten*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_{E,1}}\mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} T_a \\ 2T_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_{E,1}}u_k, \qquad \mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}_{E,2}}\mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ T_a \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_{E,2}}u_k.$$

Nur für das zweite System sind das Abtastsystem nach Eulerverfahren und das exakte Abtastsystem genau gleich.