Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 24.05.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	11	9.5	10.5	9	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **11 P.|**

a) Für die Strecke $G(s)$ mit einer additiven Störung $d(t)$ am Ausgang in Abbildung 1 soll ein digitaler Regler realisiert werden. **5 P.|**

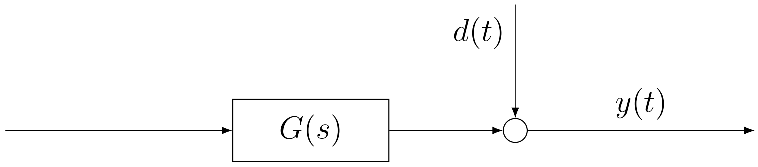

Abbildung 1: Strecke für Aufgabe 1.

i. Zeichnen Sie ein vollständiges Blockschaltbild des Regelkreises für den Systemausgang $y(t)$. Kennzeichnen Sie die Grenzen zwischen dem zeitkontinuierlichen und dem zeitdiskreten Teil mit entsprechenden Analog-Digital- bzw. Digital-Analog-Wandlern. Nehmen Sie ein zeitdiskretes Referenzsignal r_k an und beschriften Sie sowohl Regelfehler e_k als auch Stellgröße u_k. 3 P.|

ii. Vernachlässigen Sie die Störung $d(t)$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, dass der Ausgang $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand exakt mit einem konstanten Referenzsignal übereinstimmt? Nehmen Sie hierzu an, dass die Abtastzeit sinnvoll gewählt ist. 2 P.|

b) Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System von Abbildung 2: **6 P.|**

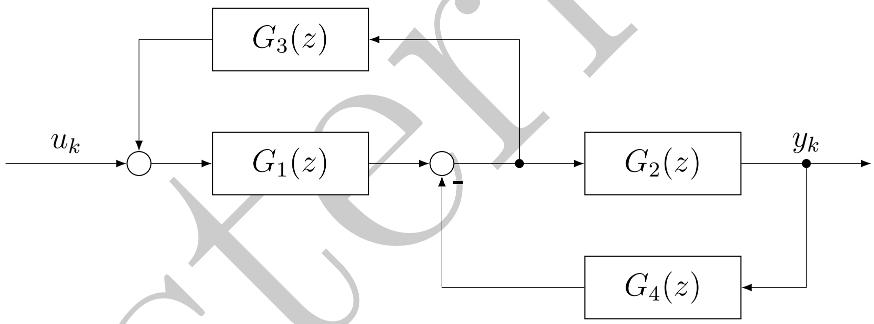

Abbildung 2: Blockschaltbild.

i. Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion vom Eingang u_k zum Ausgang y_k mit allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$, $G_3(z)$ und $G_4(z)$. 3 P.|

ii. Untersuchen Sie nun das Gesamtsystem mit den folgenden Übertragungsfunktionen: 3 P.|

$$G_1(z) = \frac{1}{2} \qquad G_2(z) = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$
$$G_3(z) = \frac{1}{z} \qquad G_4(z) = \frac{1}{z^2}.$$

- Ist das Gesamtsystem BIBO-stabil? 1 P.|
- Ist das Gesamtsystem sprungfähig? Berechnen Sie y_0 für einen Einheitssprung am Eingang u_k. 1 P.|
- Besitzt y_k bei einem Einheitssprung am Eingang u_k einen stationären Wert y_∞? Geben Sie ihn an, falls er existiert. 1 P.|

Lösung:

a) *i. siehe Abbildung 3.*

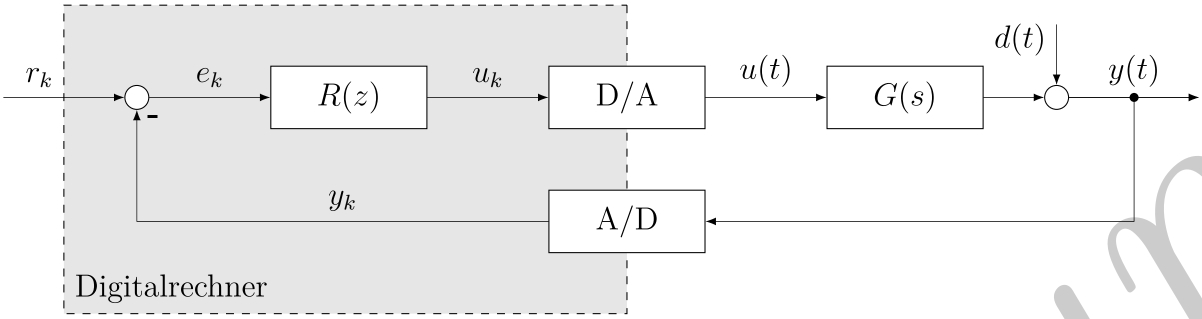

Abbildung 3: Blockschaltbild.

ii.
- *Der geschlossene Kreis muss stabil sein.*
- $e_\infty = \lim_{k\to\infty} e_k = \lim_{z\to 1}(z-1)e_z(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1+L(z)} = \lim_{q\to 0} \frac{1}{1+L^{\#}(q)} = 0$, *wobei* $L(z) = R(z)G_z(z)$ *bzw.* $L^{\#}(q) = R^{\#}(q)G^{\#}(q)$ *die z- bzw. q-Übertragungsfunktion des offenen Kreises ist.*

b) Mit den z-Transformationen $Y_1(z)$, $Y_2(z)$, $Y_3(z)$ *und* $Y_4(z)$ *wie in Abbildung 4 folgen:*

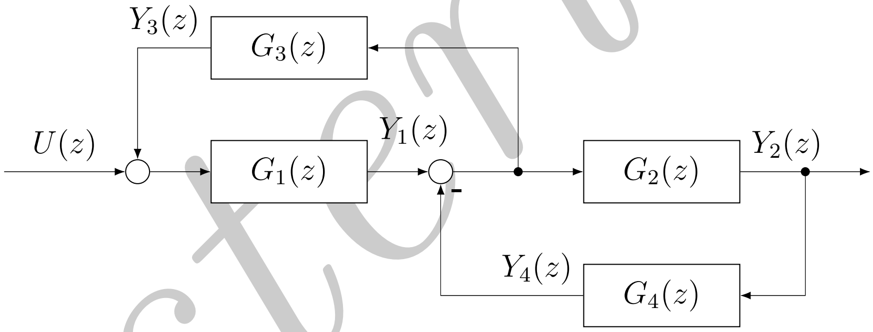

Abbildung 4: Blockschaltbild.

i. Die Argumente (z) sind der Übersichtlichkeit halber weggelassen:

$$Y_1 = G_1\big(U + Y_3\big) \qquad Y_2 = G_2\big(Y_1 - Y_4\big)$$

$$Y_3 = G_3\big(Y_1 - Y_4\big) \qquad Y_4 = G_4 Y_2$$

$$Y_2 = G_1G_2U + G_1G_2Y_3 - G_2G_4Y_2 \qquad Y_3 = G_1G_3U + G_1G_3Y_3 - G_3G_4Y_2$$

$$Y_3 = \frac{1}{1-G_1G_3}\big(G_1G_3U - G_3G_4Y_2\big)$$

$$Y_2 = G_1G_2U + \frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_3}\big(G_1U - G_4Y_2\big) - G_2G_4Y_2$$

$$Y_2 = \left(1 + \frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_1G_3} + G_2G_4\right)^{-1}\big(1 + \frac{G_1G_3}{1-G_1G_3}\big)G_1G_2U$$

$$Y_2 = \left(\frac{1-G_1G_3+G_2G_4}{1-G_1G_3}\right)^{-1}\frac{G_1G_2}{1-G_1G_3}U, \qquad \frac{Y_2}{U} = \frac{G_1G_2}{1-G_1G_3+G_2G_4}$$

ii. *Hier folgt* $\dfrac{Y_2(z)}{U(z)} = \dfrac{z^2}{2z^2 + 3/2}$

- *BIBO-Stabilität folgt aus den Nullstellen des Nennerpolynoms von* $\dfrac{Y_2(z)}{U(z)}$, *bei* $z_p = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}I$. *Da* $|z_p| < 1$ *gilt, ist das Gesamtsystem BIBO-stabil.*
- *Der Grad von Zähler- und Nennerpolynom sind gleich, also ist das System sprungfägig. Bei einem Einheitssprung folgt* $y_0 = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{Y_2(z)}{U(z)}\dfrac{z}{z-1} = 1/2$.
- *Aufgrund der BIBO-Stabilität existiert der stationäre Endwert* $y_\infty = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)\dfrac{Y_2(z)}{U(z)}\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{2}{7}$.

2. *Die Aufgaben a) bis d) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **9.5 P.|**

Betrachtet wird das folgende System mit der Störung v_k am Ausgang:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k,$$
$$y_k = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + v_k,$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Für das System soll ein vollständiger Luenberger Beobachter entworfen werden. **4.5 P.|**

i. Wählen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{\mathbf{k}}$ so, dass die Pole der Fehlerdynamikmatrix im Ursprung liegen. 2.5 P.|

ii. Berechnen Sie den Beobachtungsfehler $\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ für eine impulshafte Störung v_k und ohne Anfangsfehler für $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$: 2 P.|

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_k = \begin{cases} 3 & k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Geben Sie den Ausgang y_k für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ an, wobei der Anfangszustand im Ursprung liegt und am Eingang ein Einheitsimpuls verwendet werden soll: **2 P.|**

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad v_k = 0$$

c) Ist das System vollständig erreichbar? Begründen Sie Ihre Aussage. **1 P.|**

d) Ist ein trivialer Beobachter für das System sinnvoll? Begründen Sie Ihre Aussage. **2 P.|**

Lösung:

a) *i.* $\det\Big(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} - z_p\mathbf{E}\Big) = z_p^2 - z_p \underbrace{\left(\frac{k_1}{6} - \frac{2}{3}\right)}_{\overset{!}{=}0} \underbrace{- \frac{k_1}{9} + 1 + \frac{2k_2}{3}}_{\overset{!}{=}0}$ *führt zu* $k_1 = 4$ *und* $k_2 = -\frac{5}{6}$, *also* $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$

ii. $\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^{\mathrm{T}})\mathbf{e}_k - \hat{\mathbf{k}}v_k$ *und deswegen* $\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -12 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -18 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_5 = \mathbf{0}$

b) $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 2$, $y_3 = -\frac{11}{6}$

c) *Das System ist vollständig erreichbar. Bspw. hat die Erreichbarkeitsmatrix* $\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{\Phi\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -3 & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$ *vollen Rang.*

Alternativ: Es folgt aus $\mathrm{grad}(n(G(z))) = 2 = \dim \mathbf{x}_k$ *die vollständige Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems.*

d) *Nein, da der Beobachtungsfehler wegen den Eigenwerten von* $\mathbf{\Phi}$ *mit Betrag* $|z_p| = 1$ *nicht abklingt.*

3. Die Aufgaben a) bis d) können unabhängig voneinander gelöst werden. **10.5 P.|**

a) Bestimmen Sie für die Übertragungsfunktion **2 P.|**

$$G(s) = \frac{V}{1+sT_1}\frac{1+sT_2}{1+s\eta T_2}$$

die zugehörige Zustandsraumdarstellung in Steuerbarkeitsnormalform.

b) Bestimmen Sie für das autonome System **5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}\ , \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

den zeitlichen Verlauf des Zustands $\mathbf{x}(t)$ für den Anfangswert $\mathbf{x}_0 = [0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$.
Hinweis: Die Eigenwerte lauten $\lambda_{1,2} = -2 \pm \mathrm{I}$ und $\lambda_3 = -1$.

c) In Abbildung 5 ist die Sprungantwort der Übertragungsfunktion **1.5 P.|**

$$G(s) = \frac{V}{1+sT_1} + \frac{V_I}{s}e^{-sT_t}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Parameter V, T_1, V_I und T_t.

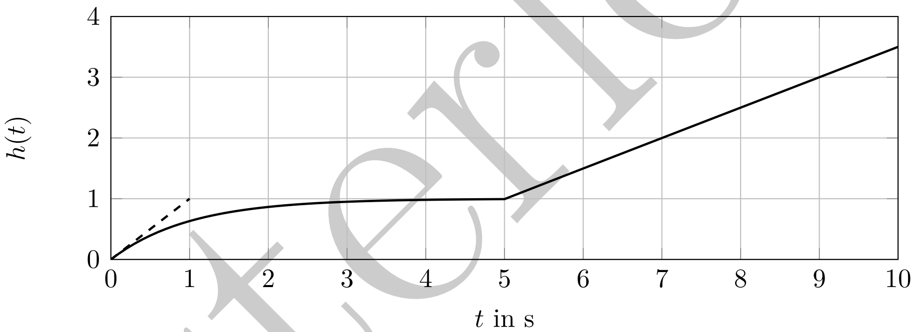

Abbildung 5: Sprungantwort.

d) Zeichnen Sie die Nyquist-Ortskurve inklusive Durchlaufsinn für die Übertragungsfunktion **2 P.|**

$$G(s) = \frac{s}{1+\frac{1}{2}s}\ .$$

Lösung:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\eta T_1 T_2} & -\frac{T_1+\eta T_2}{\eta T_1 T_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{V}{\eta T_1 T_2} & \frac{V}{\eta T_1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

b)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -2 \pm \mathrm{I} \qquad & \mathbf{v}_1 &= [-\mathrm{I}, 1, -1]^{\mathrm{T}} \\ \lambda_3 &= -1 & \mathbf{v}_3 &= [0, 0, 1]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= [\Re\{\mathbf{v}_1\}, \Im\{\mathbf{v}_1\}, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{V}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\tilde{\mathbf{\Phi}}(t) &= \begin{bmatrix} \exp(-2t)\cos(t) & \exp(-2t)\sin(t) & 0 \\ -\exp(-2t)\sin(t) & \exp(-2t)\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \\
\mathbf{z}_0 &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 = [1, 0, 2]^{\mathrm{T}} \\
\mathbf{z}(t) &= \tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}_0 = [\exp(-2t)\cos(t), -\exp(-2t)\sin(t), 2\exp(-t)]^{\mathrm{T}} \\
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{V}\mathbf{z}(t) = [\exp(-2t)\sin(t), \exp(-2t)\cos(t), -\exp(-2t)\cos(t) + 2\exp(-t)]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} V &= 1 \\ T_1 &= 1 \\ V_I &= 1/2 \\ T_t &= 5 \end{aligned}$$

d)

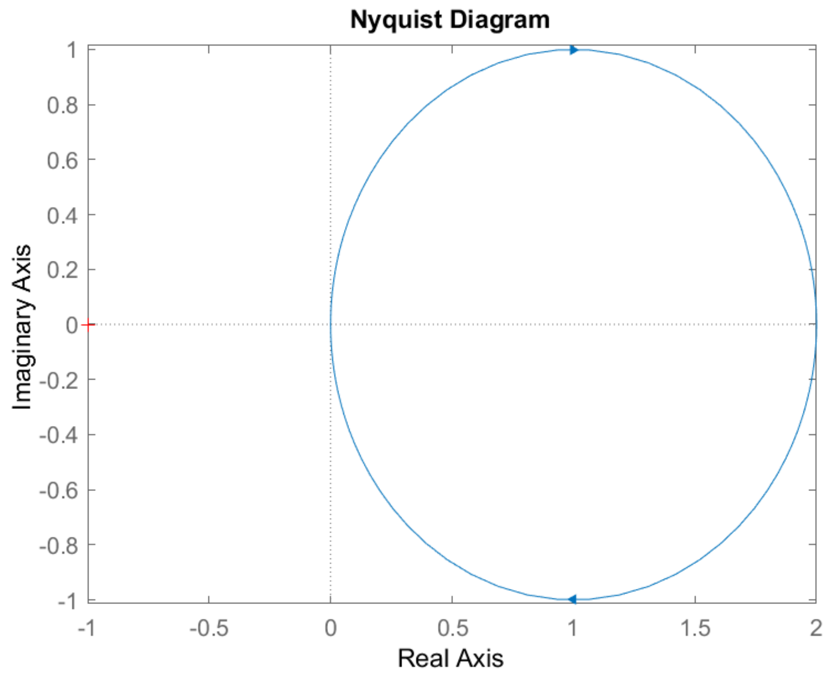

Abbildung 6: Nyquist-Ortskurve.

4. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. **9 P.|**

   a) Gegeben ist ein Regelkreis bestehend aus der Strecke **4 P.|**

   $$G(s) = \frac{s-2}{s^2+s+1} \ ,$$

   und dem Regler

   $$R(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+s+3} \ .$$

   Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Begründung:

   i. Ist die Regelstrecke $G(s)$ phasenminimal?

   ii. Ist der Regler $R(s)$ realisierbar?

   iii. Ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil?

   iv. Ist der geschlossene Regelkreis intern stabil?

   b) Entwerfen Sie für die Strecke **5 P.|**

   $$G(s) = \frac{s+2}{s-2}$$

   einen Regler mit der Struktur

   $$R(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + b_0} \ ,$$

   sodass sämtliche Pole des geschlossenen Regelkreises bei $s_i = -1$ liegen und für den offenen Regelkreis gilt $L(s)|_{s=0} = \frac{1}{2}$.

   i. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_0 und b_0. 3 P.|

   ii. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung für $r(t) = \sigma(t)$. 1 P.|

   iii. Skizzieren Sie den Betragsgang von $G(s)$. 1 P.|

Lösung:

a) *i.* *Nein. Alle Polstellen befinden sich in der linken, offenen s-Halbebene. Die Nullstelle ($s_N = 2$) befindet sich allerdings in der rechten s-Halbebene.*

ii. *Ja, da gilt* $\mathrm{grad}(z_R(s)) \leq \mathrm{grad}(n_R(s))$.

iii. *Ja, da die Polstellen* $s_{1,2} = -1$ *in der linken, offenen s-Halbebene liegen.*

iv. *Ja, da das Polynom* $z_L + n_L$ *mit* $L(s) = R(s)G(s)$ *ein Hurwitzpolynom ist, bzw. es tritt keine Kürzung instabiler Polstellen auf.*

b) *Mit*

$$
\begin{aligned}
L(s) &= \frac{a_1 s + a_0}{s + b_0}\frac{s+2}{s-2} = \frac{z_L}{n_L} \\
T_{ry}(s) &= \frac{z_L}{z_L + n_L}
\end{aligned}
$$

und dem gwünschten Nennerpolynom $d(s) = c(s+1)^2$ *führt der Koeffizientenvergleich* $z_L + n_L = d(s)$ *zu den folgenden Bestimmungsgleichungen*

$$
\begin{aligned}
a_1 + 1 &= c \\
a_0 + 2a_1 + b_0 - 2 &= c \\
2a_0 - 2b_0 &= c
\end{aligned}
$$

Zusätzlich ist die Bedingung $L(s)|_{s=0} = \frac{1}{2}$ *zu erfüllen.*

i. $a_0 = \frac{4}{5}$, $a_1 = \frac{19}{5}$, $b_0 = -\frac{8}{5}$, $c = \frac{24}{5}$

ii. $e_\infty = \frac{2}{3}$

iii. *Allpass-Glied:* $|G(\mathrm{I}\omega)|_{dB} = 0\,\mathrm{dB}$.