Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 27.09.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist das zeitkontinuierliche System **4.5 P.|**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\,, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20} \tag{1a}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad . \tag{1b}$$

i. Bestimmen Sie die Lösungstrajektorien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ des Systems (1) für einen Eingangssprung $u(t) = U\sigma(t)$ *Hinweis:* Beginnen Sie mit der Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung für $x_2(t)$. 3 P.|

ii. Geben Sie das zugehörige Abtastsystem mit einer allgemeinen Abtastzeit T_a an. *Hinweis:* Nutzen Sie das Ergebnis von i. 1.5 P.|

b) Gegeben ist das zeitdiskrete System **5.5 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix}0.5\\ 1\end{bmatrix}u_k\,, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \tag{2a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}_k \quad . \tag{2b}$$

i. Prüfen Sie das System (2) auf vollständige Beobachtbarkeit. 0.5 P.|

ii. Entwerfen Sie einen Dead-Beat Beobachter für das System (2). 2 P.|

iii. Geben Sie den in ii. entworfenen Beobachter in Zustandsraumdarstellung an. Geben Sie weiters die z-Übertragungsmatrix des Beobachters vom Eingang y_k zum geschätzen Zustand $\hat{\mathbf{x}}_k$ an. 2 P.|

iv. Bestimmen Sie für den in ii. entworfenen Beobachter das Gebiet der zulässigen Anfangsfehler $\mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$ in der $(e_{0,1}, e_{0,2})$-Ebene so, dass gilt 1 P.|

$$||\mathbf{e}_j||_2^2 < 1\,, \quad j = 0, 1, \ldots \quad .$$

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = x_{10} + x_{20}\Big(1-e^{-t}\Big) + U\Big(t - \Big(1-e^{-t}\Big)\Big)$$
$$x_2(t) = x_{20}e^{-t} + U\Big(1-e^{-t}\Big)$$

ii.

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + x_{2,k}\Big(1-e^{-T_a}\Big) + u_k\Big(T_a - \Big(1-e^{-T_a}\Big)\Big)$$
$$x_{2,k+1} = x_{2,k}e^{-T_a} + u_k\Big(1-e^{-T_a}\Big)$$
$$y_k = x_{1,k}$$

b) *i. System ist vollständig beobachtbar*

$$\mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}\Big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{rang}(\mathcal{O}) = 2$$

ii.

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

iii.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}u_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}y_k\,, \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0$$
$$\hat{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}_k \qquad .$$

$$\mathbf{G}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Gamma} = \left(\begin{bmatrix} z+1 & -1 \\ 1 & z-1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2z-1}{z^2} \\ \frac{z-1}{z^2} \end{bmatrix}$$

iv.

$$\hat{\mathbf{e}}_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{e}}_k, \quad \hat{\mathbf{e}}_0 = \begin{bmatrix} e_{0,1} \\ e_{0,2} \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} -e_{0,1} + e_{0,2} \\ -e_{0,1} + e_{0,2} \end{bmatrix}$$
$$||\mathbf{e}_0||^2 = \Big(e_{0,1}^2 + e_{0,2}^2\Big) < 1$$
$$||\mathbf{e}_1||^2 = 2(-e_{0,1} + e_{0,2})^2 < 1$$
$$||\mathbf{e}_j||^2 = 0, \quad j \geq 2$$

2. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist die z-Übertragungsfunktion vom Eingang u zu Ausgang y mit einer Abtastzeit $T_a = 1/3$ **5.5 P.|**

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}\{(y_k)\}}{\mathcal{Z}\{(u_k)\}} = \frac{2z-1}{z^2} \quad . \tag{8}$$

i. Untersuchen Sie die z-Übertragungsfunktion (8) auf 1.5 P.|

   A. Realisierbarkeit

   B. BIBO-Stabilität

   C. Sprungfähigkeit

ii. Geben Sie den stationären Fehler $\lim_{k\to+\infty}(y_k - u_k)$ für die z-Übertragungsfunktion (8) und die Eingangsfolge $(u_k) = (kT_a)$ an. 1.5 P.|

iii. Geben Sie die eingeschwungene Lösung des Systems (8) für 2.5 P.|

$$(u_k) = 3(1 - e^{-3kT_a}) + \sin(\pi k T_a) \tag{9}$$

an.

b) Gegeben ist die s-Übertragungsfunktion **2 P.|**

$$G(s) = \frac{\frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_0}}, \quad \omega_0 = \ln\left(\frac{5}{4}\right) \quad . \tag{10}$$

i. Geben Sie die zugehörige q-Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$ für $T_a = 2$ an. Vereinfachen Sie Ihre Lösung so weit wie möglich. 2 P.|

c) Gegeben ist die q-Übertragungsfunktion **2.5 P.|**

$$G_1^{\#}(q) = \frac{4(1-q)}{(4 + 10q + 25q^2)} \quad . \tag{11}$$

i. Zeichnen Sie das Bodediagramm von $G_1^{\#}(q)$ in das nachfolgende Diagramm ein. Beschriften Sie dazu die Achsen geeignet! Zeichnen Sie zuerst die Asymptoten der einzelnen Faktoren von $G_1^{\#}(q)$. Berechnen Sie Betrag und Phase an den Knickfrequenzen der einzelnen Faktoren. 2.5 P.|

Lösung:

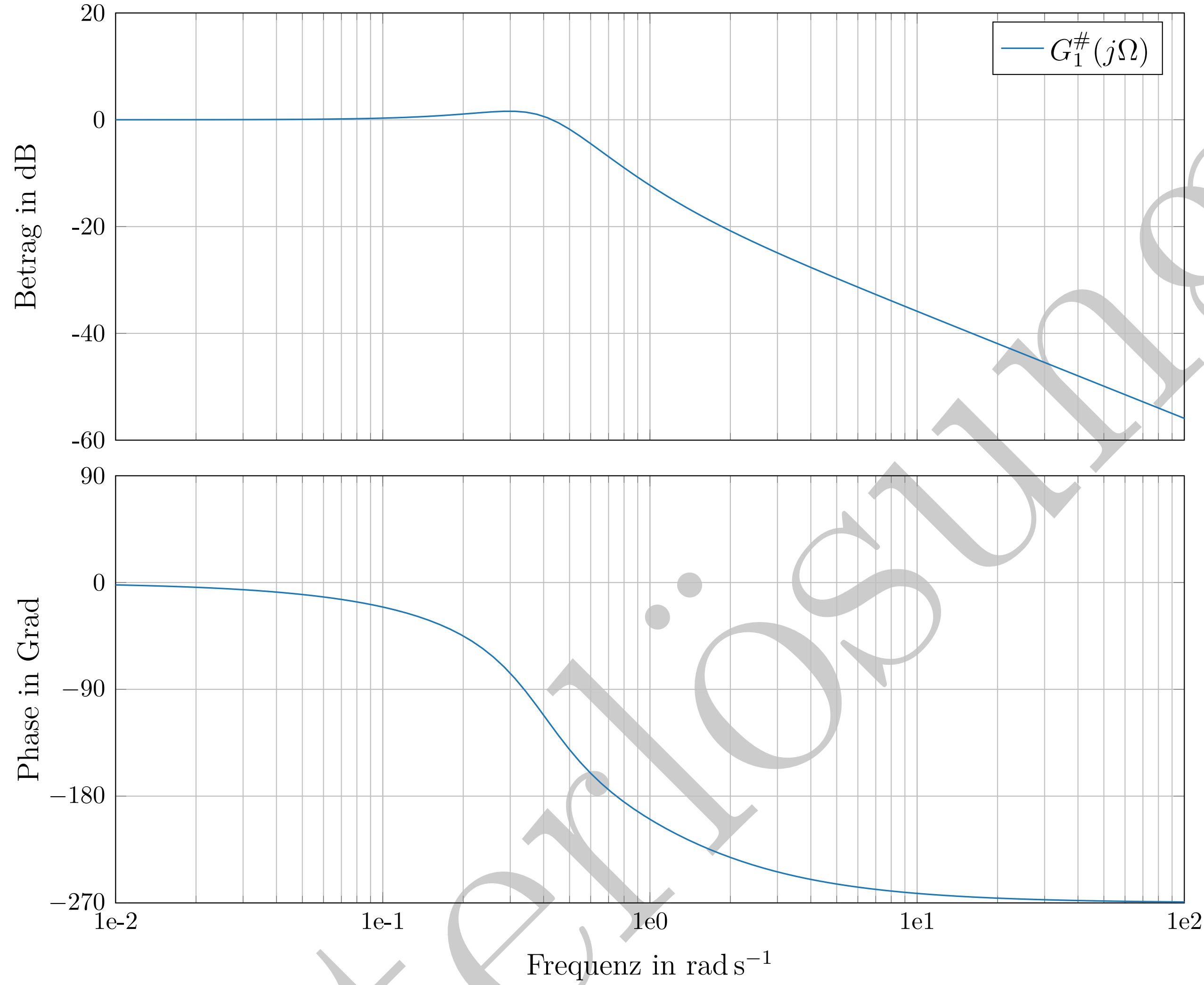


Abbildung 1: Bodediagramm (Achsbeschriftung ergänzen!)

Lösung:

a) i. A. *Realisierbar: Ja,* $\mathrm{grad}(b(z)) \leq \mathrm{grad}(a(z))$

B. *BIBO-Stabilität: Ja,* $|z_1| = |z_2| = 0 < 1$

C. *Sprungfähig: Nein,* $\lim_{z\to\infty} G(z) = 0$

ii.

$$u_z(z) = \frac{T_a z}{(z-1)^2}$$
$$\lim_{k\to+\infty}(y_k - u_k) = \lim_{z\to 1}(z-1)(G(z)-1)u_z(z) = 0$$

iii.

$$(y_k) = 3 + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right)$$

b) i.

$$G^{\#}(q) = \frac{50q}{9+41q}$$

c) i.

$$G_{11}^{\#}(q) = \frac{4}{4+10q+25q^2} = \frac{1}{1+2\xi\frac{q}{\omega_{10}}+\frac{q^2}{\omega_{10}^2}}, \quad \omega_{10} = \frac{2}{5}, \xi = 0.5$$
$$\left|G_{11}^{\#}(j\omega_{10})\right| = 1 = 0\mathrm{dB}$$
$$\arg\left(G_{11}^{\#}(j\omega_{10})\right) = -90^\circ$$
$$G_{12}^{\#}(q) = (1-q) = (1-\frac{q}{\omega_{20}}), \quad \omega_{20} = 1$$
$$\left|G_{12}^{\#}(j\omega_{20})\right| = \sqrt{2} = 3\mathrm{dB}$$
$$\arg\left(G_{12}^{\#}(j\omega_{20})\right) = -45^\circ$$

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Leiten Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{x}(t)$ eines linearen, zeitinvarianten Systems **3 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

im Zeitbereich her. Verwenden Sie dazu die Methode der Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0(t) \quad \text{wobei} \quad \mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\,.$$

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion eines Lead-Gliedes an und skizzieren Sie dessen Sprungantwort. Beschriften Sie die Sprungantwort und stellen Sie den Zusammenhang zu den Parametern der Übertragungsfunktion her. **2 P.|**

c) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **5 P.|**

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}\,.$$

Mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens soll nun für diese Übertragungsfunktion ein idealer PD-Regler entworfen werden.

i. Entwerfen Sie einen idealen PD-Regler für die folgenden Anforderungen an die Sprungantwort des geschlossenen Kreises: 2.5 P.|
   - Überschwingen 10 % und
   - Anstiegszeit $t_r = 1.5\,\text{s}$.

ii. Kann der geschlossene Kreis einer sprungförmigen Führungsfolge ohne bleibende Regelabweichung folgen? Begründen Sie ihre Antwort. 0.5 P.|

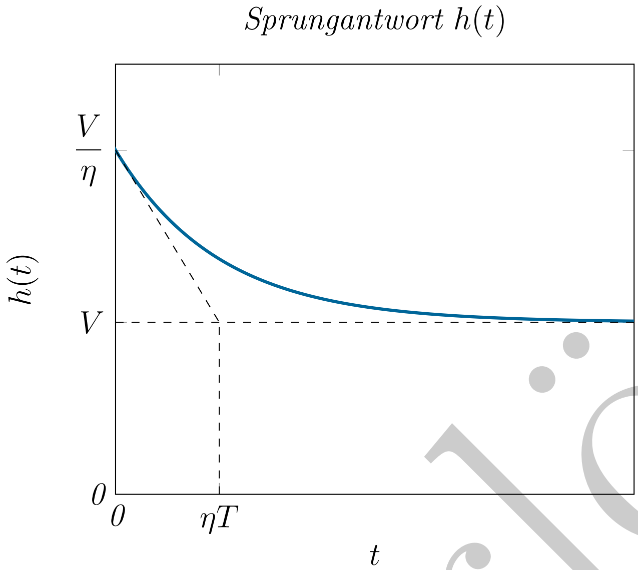
iii. Das Lead-Glied kann in einem eingeschränkten Frequenzbereich als Näherung eines idealen PD-Reglers betrachtet werden. Geben Sie jene Frequenz ω_1 an, bei der durch den Realisierungsterm die Betragskennlinie des Lead-Gliedes um 1dB bezogen auf den idealen PD-Regler abfällt. Der Realisierungsterm ist mit $(1 + s/100)$ gegeben. 2 P.|
   Hinweis: $\sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1\text{dB}$.

Lösung:

a) Siehe Skriptum zur Vorlesung Automatisierung, Kapitel 2.4.

b)

$$G(s) = V\frac{1 + sT}{1 + s\eta T} \qquad \text{mit} \quad \eta < 1$$



c) *i.*

$$R(s) = V(1 + T_\mathrm{D}s) \qquad \text{mit} \quad T_\mathrm{D} = 2 - \sqrt{3}\,, \quad V = \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{1 + T_\mathrm{D}}}$$

ii. Ja, da der offene Kreis global integrierendes Verhalten aufweist.

iii. $\omega_1 = 50\,\mathrm{s}^{-1}$

4. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben sind die folgenden Modellgleichungen **5 P.|**

$$
\begin{aligned}
V\dot{p} + \beta(q+s) &= 0 \qquad \text{mit} \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 p\,, \quad q = \gamma p^2\,,\\
\dot{V} + s &= 0\,,\\
\dot{s} + \delta s &= u\,.
\end{aligned}
$$

Der Eingang des Systems ist u. Der Ausgang des Systems ist $y = p$. Die Parameter β_0, β_1, γ und δ sind konstant und positiv reellwertig.

i. Geben Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und die Zustandsraumdarstellung für das nichtlineare System an. 1 P.|

ii. Begründen Sie, warum das nichtlineare System keine Ruhelage für $p > 0$ besitzt. 1 P.|

iii. Linearisieren Sie das nichtlineare System um die Trajektorie $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{u}(t))$ mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$. Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 3 P.|

b) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante System **5 P.|**

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u\,, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}\,,\\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\,.
\end{aligned}
$$

Die Parameter a und b sind konstant und reellwertig.

i. Ist das System vollständig erreichbar? 1 P.|
Hinweis: Beachten Sie die spezielle Struktur des Systems.

ii. Geben Sie ein reduziertes System mit nur 2 Zuständen an, welches dieselbe Übertragungsfunktion $T_{u,y}(s)$ vom Eingang u zum Ausgang y besitzt. 1 P.|

iii. Welche Bedingungen müssen die Parameter a und b erfüllen, damit das System BIBO-stabil ist? 1.5 P.|
Hinweis: Sie müssen dazu nicht die Übertragungsfunktion berechnen.

iv. Angenommen die Bedingungen für BIBO-Stabilität sind erfüllt. Wie lautet dann der stationäre Wert des Ausgangs $\lim_{t\to\infty} y(t)$ bei einem Einheitssprung des Eingangs $u = \sigma(t)$? 1.5 P.|

Lösung:

a) *i.*

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} p & V & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{V} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta_0 + \beta_1 p}{V}(\gamma p^2 + s) \\ -s \\ u - \delta s \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

$$y = p$$

ii. *Aus der notwendigen Bedingung für eine Ruhelage, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, und der Forderung $p > 0$ folgt ein Widerspruch, da dann nicht gleichzeitig $\dot{p} = 0$ und $\dot{V} = 0$ erfüllt werden kann:*

$$-s = 0 \implies \gamma p^2 + s > 0 \implies \mathbf{f} \neq \mathbf{0}$$

iii.

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u\,, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \Delta y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{x} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &= \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \\ \Delta u &= u - \tilde{u} \\ \Delta y &= y - \tilde{y} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & A_{13}(t) \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} A_{11}(t) &= \left.\left(-\frac{\beta_1}{V}(q+s) - \frac{2\beta}{V}\gamma p\right)\right|_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})} \\ A_{12}(t) &= \left.\left(\frac{\beta}{V^2}(q+s)\right)\right|_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})} \\ A_{13}(t) &= \left.\left(-\frac{\beta}{V}\right)\right|_{(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{u}})} \end{aligned}$$

b) *i.* *Nein, da der dritte Zustand x_3 weder durch den Eingang noch durch einen anderen Zustand beeinflusst wird. Das nicht erreichbare Teilsystem lautet $\dot{x}_3 = -x_3$ (und ist stabil).*

ii. *Der reduzierte Zustandsvektor $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ setzt sich nur aus den ersten beiden Zuständen x_1 und x_2 zusammen und das reduzierte System lautet*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}' &= \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}\mathbf{x}' + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u\,, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}'\,. \end{aligned}$$

iii. Die beiden Bedingungen lauten $a + b < 0$ *sowie* $ab > 1$.

iv.

$$y_\infty = \frac{2 - (a + b)}{ab - 1}$$