Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 08.11.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

Musterlösung

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

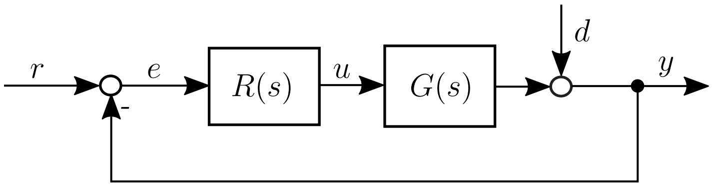

Abbildung 1: Blockdiagramm des Regelkreises.

a) Gegeben ist der in Abbildung 1 dargestellte Regelkreis mit der Übertragungsfunktion **5 P.|**

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s^2 - 1)(s + 3)}.$$

i. Geben Sie an, ob das System $G(s)$ BIBO-stabil, phasenminimal und sprungfähig ist. Begründen Sie Ihre Antworten! 1.5 P.|

ii. Weiters sind die Regler mit den Übertragungsfunktionen 3.5 P.|

$$R_1(s) = V\frac{s+1}{s},\ R_2(s) = V\frac{s-1}{s+1},\ R_3(s) = V\frac{s+3}{2}$$

gegeben.
Welcher realisierbare Regler führt zu einem intern stabilen Regelkreis?
In welchem Wertebereich muss hierzu V liegen? Begründen Sie Ihre Antworten!

b) Es sei nun das zeitkontinuierliche System **5 P.|**

$$G(s) = \frac{9s}{s^2 + 2s + 3}$$

gegeben.

i. Geben Sie für den Regelkreis in Abbildung 1 die Übertragungsfunktionen $T_{r,e}(s) = \frac{\hat{e}(s)}{\hat{r}(s)}$ und $T_{d,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)}$ in allgemeiner Form an. 1 P.|

ii. Im Folgenden wird ein Kompensationsregler der Form 4 P.|

$$R(s) = V\frac{b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

verwendet. Wählen Sie die Koeffizienten a_1, a_2, b_1 und b_2 so, dass eine harmonische Störung $d(t) = 2\sin(t)$ am Ausgang y im eingeschwungenen Zustand zu 0 wird. In welchem Wertebereich darf hierbei die Verstärkung $V \in \mathbb{R}$ gewählt werden, sodass der Regelkreis in Abbildung 1 stabil ist?
Hinweis: Überlegen Sie zuerst wie b_1 und b_2 gewählt werden müssen.

Musterlösung

Lösung:

a) *i.*

- *Das System ist nicht BIBO-stabil, da $G(s)$ einen Pol bei s=+1 hat.*
- *Das System ist nicht phasenminimal, da $G(s)$ einen Pol bei s=+1 hat.*
- *Das System ist nicht sprungfähig, da $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ gilt.*

ii.

- *$R_2(s)$ führt zu einer nicht erlaubten Pol/Nullstellenkürzung für $s = +1$ (siehe Satz 4.1).*
- *$R_3(s)$ ist nicht realisierbar.*
- *$R_1(s)$ führt mit $V > 4$ auf einen intern stabilen Regelkreis (siehe Satz 4.1).*

b) *i.* $T_{r,e}(s) = T_{d,y}(s) = \frac{1}{1+R(s)G(s)}$

ii. $G(s) = \frac{9s}{s^2+2s+3} = \frac{3s}{\frac{1}{3}s^2+\frac{2}{3}s+1}$. *Damit der Pol von $G(s)$ kompensiert wird, muss für die Zählerkoeffizienten des Reglers $b_2 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{3}$ gewählt werden. Aus der Forderung $|T_{d,y}(j\omega)| \overset{!}{=} 0$ für $\omega = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ folgt $a_2 = 1, a_1 = 0$.*

Musterlösung

2. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist das autonome System **7 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

mit der Dynamikmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ \xi & -1 \end{bmatrix}.$$

i. Für welchen Wertebereich von $\xi \in \mathbb{R}$ ist das System (1) asymptotisch stabil? 1 P.|

ii. Wie muss $\xi \in \mathbb{R}$ gewählt werden, sodass die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ bei $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$ liegen? 1 P.|

iii. Geben Sie jene Zustandstransformation 3 P.|

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$$

an, die das System (1) mit ξ aus ii. auf Jordansche Normalform transformiert. Schreiben Sie das System (1) im neuen Zustand $\mathbf{z}$ an.

iv. Bestimmen Sie für das transformierte System aus iii. das zugehörige Abtastsystem (exakte Diskretisierung) mit der Abtastzeit $T_a = \pi$. Geben Sie den Verlauf des diskreten Zustandes $\mathbf{z}_k$ für $k = 1, 2, \ldots$ und einen allgemeinen Anfangswert $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}$ an. 2 P.|

b) Gegeben ist ein zeitkontinuierliches System der Form **3 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2}$$

mit $\dim(\mathbf{x}) = 2$. Geben Sie für konstantes $u = u_R \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die notwendigen Eigenschaften von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ an, sodass das System (2)

- keine Ruhelage,
- genau eine Ruhelage,
- unendlich viele Ruhelagen

besitzt. Geben Sie auch jeweils ein Beispiel an.

Musterlösung

Lösung:

a) i. *Das System ist asymptotisch stabil für* $\xi < 4$.

ii. *Die vorgegebenen Eigenwerte erhält man für* $\xi = -2$.

iii. *Die zugehörigen Eigenvektoren lauten* $\mathbf{v}_1 = [1, 1]^{\mathrm{T}}$ *und* $\mathbf{v}_2 = [1, 2]^{\mathrm{T}}$ *und somit lautet die Transformationsmatrix*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Das System im neuen Zustand $\mathbf{z}$ *lautet*

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \ . \tag{3}$$

iv. *Das zugehörige Abtastsystem lautet*

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} \exp(-3\pi) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi) \end{bmatrix} \mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \exp(-3k\pi) & 0 \\ 0 & \exp(-2k\pi) \end{bmatrix} \mathbf{z}_0 \ . \tag{4}$$

b) *Siehe S.32 des Kapitels 2.5.1 Begriff der Ruhelage im Skriptum der VO Automatisierung.*

Musterlösung

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Betrachten Sie die Differenzengleichung **6 P.|**

$$y_{k+2} = p_1 y_{k+1} + p_2 y_k + p_3 u_k, \tag{5}$$

wobei p_1, p_2 und p_3 reelle Zahlen sind.

i. Geben Sie eine Zustandsdarstellung von (5) mit dem Eingang u_k, dem Zustand $\mathbf{x}_k$ und dem Ausgang y_k an. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der in i. bestimmten Zustandsdarstellung. 1 P.|

iii. Bestimmen Sie die Bedingungen, die p_1, p_2, p_3 in (5) erfüllen müssen, sodass die in i. bestimmte Zustandsdarstellung minimal ist. Begründen Sie Ihre Antwort. 2 P.|

iv. Nun ist $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Entwerfen Sie einen vollständigen Zustandsbeobachter für die in i. bestimmte Zustandsdarstellung, sodass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei $1/2$ und $-1/2$ zu liegen kommen. 2 P.|

b) Betrachten Sie das zeitkontinuierliche, nichtlineare System **4 P.|**

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{6a}$$

$$\dot{x}_2 = \alpha \sin(x_1) + \beta x_2 + u^3, \tag{6b}$$

$$y = x_1 \tag{6c}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

i. Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems (6) in Abhängigkeit von $u = u_R$. 1.5 P.|

ii. Linearisien Sie das System (6) um eine allgemeine Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$, $u = u_R$, $y = y_R$ und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 1.5 P.|

iii. Ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches System ist vollständig erreichbar. Ist dann auch das zugehörige Abtastsystem mit der Abtastzeit T_a vollständig erreichbar? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

Musterlösung

Lösung:

a) i. *Die Zustandsdarstellung lautet*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u, \tag{7a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_k, \tag{7b}$$

z.B. mit den Matrizen

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 & p_1 \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^\top = \begin{bmatrix} p_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

aus der Steuerbarkeitsnormalform. Jede äquivalente Wahl der Matrizen $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{c}^\top)$ *ist aber auch korrekt.*

ii. $G(z) = \frac{p_3}{z^2 - p_1 z - p_2}$

iii. *Für die Wahl* (8) *ist*

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p_1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

und

$$\mathcal{O}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{c}^\top) = \begin{bmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & p_3 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Für $p_3 = 0$ *ist das System nicht beobachtbar, deshalb ist* (8) *keine minimale Darstellung.*

iv. $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1 & -7/4 \end{bmatrix}^\top$, *damit* $\mathbf{\Phi}_e = \mathbf{\Phi} + \mathbf{k}\mathbf{c}^\top$ *die gewünschten Eigenwerte hat.*

b) i. *Die Ruhelagen sind* $x_{1,R} = \arcsin(-u_R^3/\alpha) + 2k\pi, x_{2,R} = 0, u_R$ *beliebig,* $y_R = \arcsin(-u_R^3/\alpha) + 2k\pi$, *und* $x_{1,R} = \pi - \arcsin(-u_R^3/\alpha) + 2k\pi, x_{2,R} = 0, u_R$ *beliebig,* $y_R = \pi - \arcsin(-u_R^3/\alpha) + 2k\pi$ *für jedes* $k \in \mathbb{Z}$.

ii. *Es ist* $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R, \Delta u = u - u_R, \Delta y = y - y_R$. *Die lineare Zustandsdarstellung ist*

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha\cos(x_{1,R}) & \beta \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3u_R^2 \end{bmatrix}\Delta u, \tag{11a}$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^\top \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}. \tag{11b}$$

iii. *Siehe Satz 7.9.*

Musterlösung

4. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

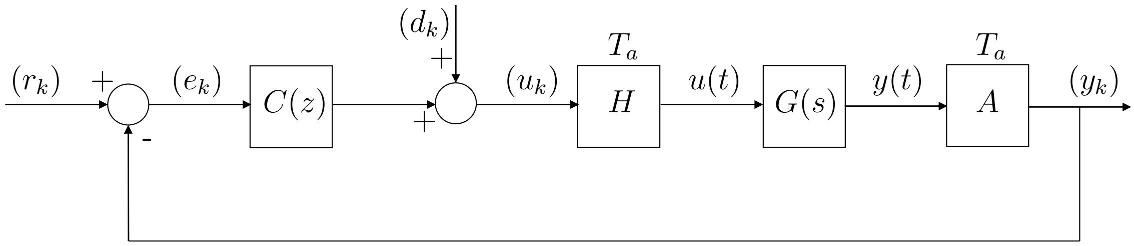

Abbildung 2: Regelkreis für Aufgabe 4a).

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **7 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{s}. \tag{12}$$

Die Strecke wird von einem digitalen Regelkreis wie in Abbildung 2 geregelt. Der Regler entspricht einem Proportional-Glied der Form $C(z) = K > 0$. Betrachten Sie $(d_k) = 0$ für i., ii. und iii.

i. Bestimmen Sie $G(z)$ von (u_k) nach (y_k) mit der allgemeinen Abtastzeit T_a. 1 P.|

ii. Für welchen Wertebereich der Verstärkung K ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil? 1 P.|

iii. Betrachten Sie $(r_k) = (1^k)$. Beurteilen Sie, ob $\lim_{k\to\infty} y_k = r_k$ gilt und begründen Sie Ihre Antwort. 1.5 P.|

iv. Nun ist $(r_k) = (d_k) = (1^k)$. Beurteilen Sie, ob $\lim_{k\to\infty} y_k = r_k$ gilt und begründen Sie Ihre Antwort. 1.5 P.|

v. Berechnen Sie den eingeschwungenen Zustand von (y_k) für $T_a = \frac{1}{K}$, $(r_k) = 0$ und $(d_k) = (7\sin(\frac{\pi}{4}k))$. 2 P.|

b) Gegeben ist das System **3 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u_k, \tag{13a}$$

$$y_k = \mathbf{c}^\top\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k, \tag{13b}$$

mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^\top$. Entwerfen Sie einen Zustandsregler für das System (13) so, dass der zeitliche Verlauf

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^\top, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \forall k \geq 3 \tag{14}$$

folgt.
Hinweis: Beachten Sie die besondere Struktur des zeitlichen Verlaufs in (14).

Musterlösung

Lösung:

a) *i.* $G(z) = T_a/(z-1)$.

ii. $T_{ry}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)} = \frac{KT_a}{z-1+KT_a}$. *Das ist BIBO-stabil für* $0 < K < 2/T_a$.

iii. *Ja, weil durch Anwendung des Endwertsatzes*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}T_{ry}(z) = 1. \tag{15}$$

iv. *Die Übertragungsfunktion von* (d_k) *nach* (y_k) *ist* $T_{dy}(z) = \frac{y_z(z)}{d_z(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)C(z)} = \frac{T_a}{z-1+KT_a}$. *Die Antwort auf die Frage ist nein, weil durch Anwendung des Superpositionsprinzips und des Endwertsatzes*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}T_{ry}(z) + \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}T_{dy}(z) = 1 + \frac{1}{K} \neq 1. \tag{16}$$

v. *Für* $T_a = \frac{1}{K}$ *wird*

$$T_{dy}(z) = \frac{1}{Kz}. \tag{17}$$

Wegen des Superpositionsprinzips ist im eingeschwungenen Zustand

$$y_k = \left|T_{dy}(e^{\mathrm{I}\frac{\pi}{4}})\right| \cdot 7\sin\left(\frac{\pi}{4}k + \arg\left(T_{dy}(e^{\mathrm{I}\frac{\pi}{4}})\right)\right) = \frac{7}{K}\sin\left(\frac{\pi}{4}k - \frac{\pi}{4}\right). \tag{18}$$

b) *Ein Dead-Beat Regler muss entworfen werden, da der zeitliche Verlauf in* (14) *gleich null für* $k \geq 3$ *ist. Mit* $\mathbf{k} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\end{bmatrix}^\top$ *hat* $\mathbf{\Phi}_g = \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^\top$ *die gewünschten Eigenwerte* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Musterlösung