

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Automatisierung  
am 11.04.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

| Aufgabe            | 1  | 2 | 3  | 4  | Bonus | $\Sigma$ |
|--------------------|----|---|----|----|-------|----------|
| erreichbare Punkte | 10 | 9 | 10 | 11 | 5     | 40 + (5) |
| erreichte Punkte   |    |   |    |    |       |          |

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Sie können die Aufgaben a) und b) unabhängig voneinander lösen.

10 P. |

a) Gegeben sei ein zeitdiskretes LTI-System, das durch die Differenzgleichung

4,5 P. |

$$y_k - \frac{1}{2} y_{k-1} = u_k + 2 u_{k-1}$$

mit dem Eingang  $u_k$  und dem Ausgang  $y_k$  beschrieben wird.

- i. Leiten Sie die Übertragungsfunktion  $G(z)$  her und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. 1 P. |
- ii. Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen von  $G(z)$ . Überprüfen Sie, ob das System BIBO-stabil und sprunghfähig ist. 1,5 P. |
- iii. Ermitteln Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems in der Form 2 P. |

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} u_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d u_k. \end{aligned}$$

Geben Sie explizit  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{c}^T$  und  $d$  an.

b) Für eine zeitdiskrete Strecke mit der  $q$ -Übertragungsfunktion

5.5 P. |

$$G^\#(q) = \frac{3q + \sqrt{3}}{q + 2 - \sqrt{3}}$$

soll ein diskreter PI-Regler entworfen werden.

- i. Geben Sie eine allgemeine Vorschrift an, wie aus einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  die zugehörige  $q$ -Übertragungsfunktion  $G^\#(q)$  unter Anwendung der Tustin-Transformation 1 P. |

$$q = \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1}$$

mit Abtastzeit  $T_a$  bestimmt werden kann.

- ii. Geben Sie die  $q$ -Übertragungsfunktion  $R^\#(q)$  und die Zustandsrealisierung als Differenzgleichungssystem des diskreten PI-Reglers an. 1.5 P. |
- iii. Bestimmen Sie die Parameter der  $q$ -Übertragungsfunktion des PI-Reglers so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises folgende Vorgaben erfüllt: 3 P. |
  - Maximales Überschwingen: 10 %
  - Anstiegszeit: 1.2 s
  - Keine bleibende Regelabweichung für die Eingangsfolge  $(1^k)$ .

**Hinweis:** Nutzen Sie für die Berechnung die Formelsammlung.

**Lösung:**

a) i. Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{z+2}{z-\frac{1}{2}}.$$

ii. Pole, Nullstellen, Stabilität, Sprungantwort:

$$\text{Nullstelle: } z_0 = -2, \quad \text{Pol: } p = \frac{1}{2}.$$

Das System ist BIBO-stabil und sprungfähig.

iii. Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0.5 x_k + u_k, & \Phi &= 0.5, \Gamma = 1, c^T = 1, d = 1. \\ y_k &= x_k + u_k, \end{aligned}$$

b) i. Allgemeines Vorgehen zur Bestimmung von  $G^\#(q)$  aus  $G(s)$  mithilfe der Tustin-Transformation:

$$G^\#(q) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Bigg|_{z=\frac{1+\frac{T_a}{2}q}{1-\frac{T_a}{2}q}}.$$

ii.  $q$ -Übertragungsfunktion  $R^\#(q)$  und Zustandsrealisierung des diskreten PI-Reglers:

$$R^\#(q) = \frac{V_I(1+qT_I)}{q},$$

$$x_{k+1} = x_k + V_I T_a e_k,$$

$$u_k = x_k + V_I \left( T_I + \frac{T_a}{2} \right) e_k.$$

iii.

$$T_I = -(2 - \sqrt{3}), \quad V_I = \frac{1}{3(2 - \sqrt{3})}.$$

2. Sie können die Aufgaben a) und b) unabhängig voneinander lösen.

9 P. |

a) Gegeben sind folgende Modellgleichungen

5 P. |

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) + x_1^3(t) + \cos(u(t)) \quad (2)$$

$$y(t) = \sin(x_1(t)). \quad (3)$$

wobei  $u(t) \in [0, \pi]$  der Eingang und  $y(t)$  der Ausgang des Systems ist.

- i. Berechnen Sie die Ruhelagen  $\mathbf{x}_R$  des Systems für einen konstanten Eingang  $u_R = \pi/2$ . Zeigen Sie graphisch anhand einer Skizze, wo die Ruhelagen  $\mathbf{x}_R$  für den Fall  $u_R \neq \pi/2$  zu liegen kommen können. 2 P. |
  - ii. Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage  $(\mathbf{x}_R, u_R)$ . 1 P. |
  - iii. Berechnen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix des linearisierten Systems um eine Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  und  $u_R = \pi/2$ . Beurteilen Sie die globale asymptotische Stabilität dieser Ruhelage. 2 P. |
- b) Betrachten Sie nun ein LTI-System zweiter Ordnung der Form 4 P. |

$$\dot{z}_1(t) = az_2(t), \quad \dot{z}_2(t) = -4z_1(t) - 4z_2(t) + u(t).$$

- i. Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ , welche das System in die 1-te Standardform transformiert. 2 P. |
- ii. Entwerfen Sie einen Zustandsregler  $u(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{z}(t)$  so, dass das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises einen Dämpfungsgrad  $\zeta = 0.7$  und eine Zeitkonstante  $T = 1/2$  aufweist. Nehmen Sie hier  $a = 1$  an. 2 P. |

**Lösung:**

a) i. Für einen konstanten Eingang  $u_R = \frac{\pi}{2}$  erfüllen die Ruhelagen

$$\mathbf{x}_R \in \{(0,0)^T, (1,0)^T, (-1,0)^T\}.$$

Für  $u_R \neq \pi/2$  gilt  $c = \cos(u_R) \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Die Ruhelagen müssen dann

$$x_{1R}(x_{1R}^2 - 1) = c \neq 0 \Rightarrow x_{1R} \neq 0$$

erfüllen, woraus folgt

$$x_{1R}^2 - 1 = \frac{c}{x_{1R}}.$$

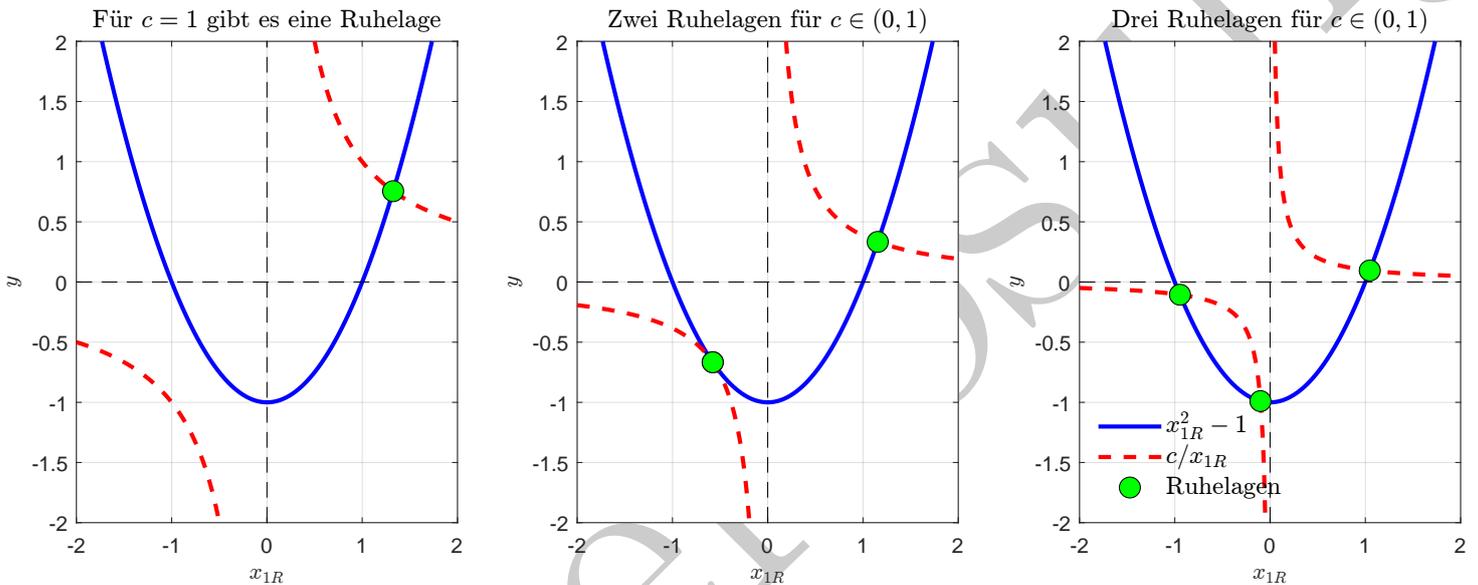


Abbildung 1: Gleichgewichtspunkte für verschiedene Werte von  $c = \cos(u_R)$ : Ein Gleichgewichtspunkt für  $c = 1$ , zwei Gleichgewichtspunkte für  $c \in (0, 1)$  (kritischer Fall), und drei Gleichgewichtspunkte für  $c \in (0, 1)$ .

ii. Linearisierung:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 3x_{1R}^2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin u_R \end{bmatrix}, \quad c^T = [\cos x_{1R} \quad 0], \quad d = 0.$$

iii. Für die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = (0, 0)$  und  $u_R = \pi/2$  ergibt sich

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  ist somit global asymptotisch stabil.

b) i. Zustandstransformation in die 1-te Standardform:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

ii. Zustandsrückführung für  $a = 1$ :

$$k^T = [0 \quad 1.2].$$

3. Sie können die Aufgaben a), b) und c) unabhängig voneinander lösen.

10 P. |

a) Mit dem Matlab-Befehl  $\mathbf{k} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda})$  kann für ein LTI- System

4 P. |

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (4a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (4b)$$

eine Zustandsrückführung der Form  $u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$  so entworfen werden, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei beliebig gewählten  $\lambda_j$  zu liegen kommen.

i. Mit dem Befehl `acker` kann auch ein vollständiger Luenberger-Beobachter entworfen werden. Wählen Sie die Argumente der Funktion `acker` so, dass die Pole der Beobachtungsfehlerdynamik bei beliebigen  $\hat{\lambda}_j$  zu liegen kommen. Welche Bedingung muss (4) erfüllen, damit dies immer möglich ist?

2 P. |

**Hinweis:** Beachten Sie, dass die Zeilenanzahl von den ersten beiden Argumenten im Befehl `acker` gleich sein muss.

ii. Schreiben Sie den vollständigen Luenberger-Beobachter und die Differentialgleichung des zugehörigen Beobachtungsfehlers an.

2 P. |

**Hinweis:** Achten Sie auf das richtige Vorzeichen.

b) Zeichnen Sie das Strukturschaltbild der Zustandsregler/Zustandsbeobachter-Konfiguration. Nutzen Sie dafür nur die in Abbildung 2 dargestellten gängigen Blöcke und Symbole. Der Parameter  $g$  des Verstärkers kann ein Skalar, ein Vektor oder eine Matrix sein.

3 P. |

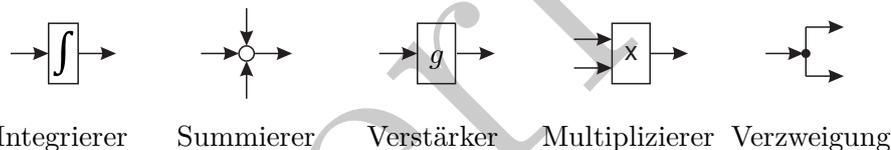


Abbildung 2: Einige wesentliche Blöcke und Symbole für Strukturschaltbilder.

c) Geben Sie die Vorschrift zur Berechnung der Ausgangsfolge ( $y_k$ ) im eingeschwungenen Zustand für den in Abbildung 3 dargestellten Regelkreis mit der Abtastzeit  $T_a$  und  $d(t) = 10e^{-t} + 5 \sin(3t + 15^\circ)$ .

3 P. |

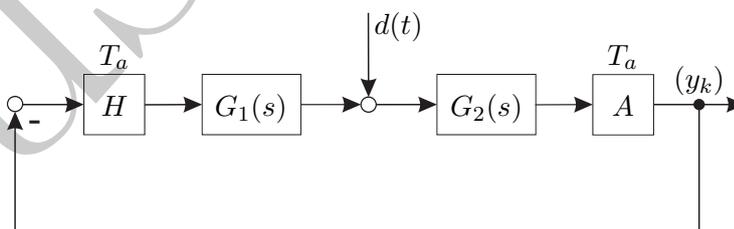


Abbildung 3: Regelkreis mit Halteglied und Abtaster.

**Lösung:**

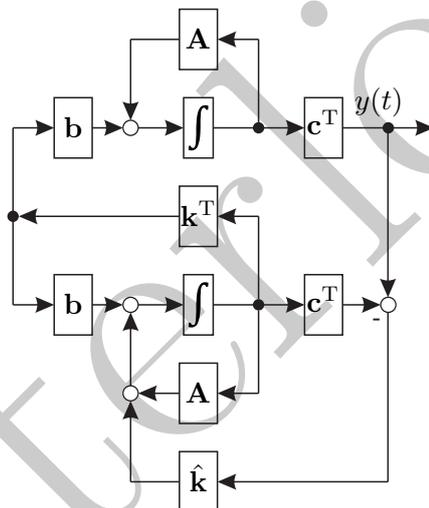
- a) i.  $\hat{\mathbf{k}} = \text{acker}(\mathbf{A}^T, \mathbf{c}, \hat{\lambda})$ . Das Paar  $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$  muss vollständig beobachtbar sein.  
 ii. Der vollständige Luenberger-Beobachter lautet

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t) - \hat{\mathbf{k}}(\hat{y} - y) \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

und die zugehörige Dynamik des Beobachtungsfehlers  $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$  ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)\mathbf{e}(t).$$

- b) Die folgende Abbildung veranschaulicht das Strukturschaltbild der sogenannten Zustandsregler/Zustandsbeobachter-Konfiguration für ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches Eingrößensystem mit dem Zustandsregelgesetz  $u(t) = \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}}$ .



- c) Im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$(y_k) = |\bar{G}(e^{3IT_a})| |G_2(3I)| 5 \sin(k3T_a + 15^\circ + \arg(G_2(3I)) + \arg(\bar{G}(e^{3IT_a})))$$

$$\text{mit } \bar{G}(z) = \frac{1}{1+G(z)} \text{ und } G(z) = \frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G_1(s)G_2(s)}{s} \right\}.$$

4. Sie können die Aufgaben a), b) und c) unabhängig voneinander lösen.

11 P. |

- a) Gegeben ist ein autonomes zeitkontinuierliches LTI System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  der Ordnung 2. Bei einem Anfangszustand

3 P. |

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ergibt sich das Ausgangssignal  $y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = \cos(t) + 2 \sin(t)$ . Hingegen ergibt sich bei einem Anfangszustand

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

das Ausgangssignal  $y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = \sin(t) - 2 \cos(t)$ .

- i. Bestimmen Sie  $\mathbf{c}^T$ . 1 P. |  
ii. Bei welchem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  ergibt sich das Ausgangssignal  $y(t) = \sin(t)$ . 2 P. |

- b) Leiten Sie die allgemeine Lösung des LTI-Systems 2.5 P. |

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

mit dem Eingang  $u(t)$  und dem Ausgang  $y(t)$  her.

- c) Gegeben ist das folgende System 2.5 P. |

$$\dot{x}(t) = u(t - T_0), \quad x(t_0) = x_0 \quad (7)$$

mit dem Ausgang  $y(t) = x(t)$  und einer festen Zeitverschiebung  $T_0 > 0$ . Beweisen Sie anhand der Definition der Zeitinvarianz, dass dieses System zeitinvariant oder zeitvariant ist.

- d) In Abbildung 4 ist die Impulsantwort  $g(t)$  eines LTI-Systems skizziert. 3 P. |

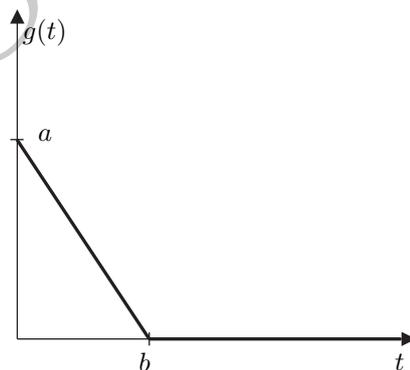


Abbildung 4: Impulsantwort eines LTI-Systems.

- i. Ist dieses System BIBO-stabil? (Begründen Sie Ihre Antwort!) 0.5 P. |  
ii. Berechnen Sie die Sprungantwort  $h(t)$  dieses Systems. 2 P. |  
iii. Ist dieses System sprunghfähig? (Begründen Sie Ihre Antwort!) 0.5 P. |

**Lösung:**

- a) i.  $\mathbf{c}^T = [-1 \ 1]$   
ii.  $\mathbf{x}_0^T = 1/5[1 \ 1]$

b) Siehe Beweis von Satz 2.4 im Automatisierungs-Skriptum.

c) Sei  $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t u(\tau - T_0)d\tau$  die Ausgangsgröße des Systems zum Zeitpunkt  $t$  für den Anfangswert  $x(t_0) = x_0$  und die Eingangsgröße  $u(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ . Sei  $\tilde{y}(t) = x(t_0 + T) + \int_{t_0+T}^t u(\tau - T_0 - T)d\tau$  die Ausgangsgröße des Systems zum Zeitpunkt  $t$  für den Anfangswert  $x(t_0 + T)$  und die Eingangsgröße  $u(\tau - T)$ ,  $t_0 + T \leq \tau \leq t + T$ . Das System ist wegen  $\tilde{y}(t) = y(t - T)$  mit  $x(t_0 + T) = x_0$  zeitinvariant.

- d) i. Ja  
ii.

$$h(t) = \begin{cases} at - \frac{a}{2b}t^2 & t \in [0, b] \\ \frac{ab}{2} & t \geq b \end{cases}$$

- iii. Nein