Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 30.05.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	9	11	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Sie können die Aufgaben a), b) und c) unabhängig voneinander lösen.* **10 P.|**

a) Gegeben ist ein zeitkontinuierliches System, das durch die Differenzialgleichung **3 P.|**

$$\dot{x} = \exp(-x)u \tag{1}$$

mit dem Eingang u und dem Anfangszustand $x(0) = x_0$ beschrieben wird.

i. Linearisieren Sie das System um die Ruhelage $u_R = 0$, $x_R \in \mathbb{R}$ und stellen Sie es in der Form 1.5 P.|

$$\Delta\dot{x} = a\Delta x + b\Delta u$$

dar.

ii. Berechnen Sie auf Basis des linearisierten Systems das Abtastsystem mit Hilfe der ZOH-Diskretisierung und einer Abtastzeit T_a. Stellen Sie das zeitdiskrete, linearisierte System in der Form 1.5 P.|

$$\Delta x_{k+1} = \Phi\Delta x_k + \Gamma\Delta u_k$$

dar. Geben Sie explizit Φ und Γ an.

b) Alternativ lässt sich die Darstellung des zeitdiskreten Systems wie folgt berechnen. **4 P.|**

i. Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung (1) für einen konstanten Eingang $u(t) = u_k$ im Zeitintervall $kT_a \leq t < (k+1)T_a$ und einen Anfangswert $x(kT_a) = x_k$. Berechnen Sie aus dieser Lösung den Wert von $x((k+1)T_a) = x_{k+1}$ als Funktion von x_k und u_k in der Form 3 P.|

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k)$$

mit der nichtlinearen Abbildung $F(\cdot,\cdot)$.

ii. Linearisieren Sie diesen nichtlinearen Ausdruck um die Ruhelage $u_R = 0$, $x_R \in \mathbb{R}$ und stellen Sie das linearisierte, zeitdiskrete System in der Form 1 P.|

$$\Delta x_{k+1} = \Phi\Delta x_k + \Gamma\Delta u_k$$

dar.

c) Für ein allgemeines zeitkontinuierliches LTI-System **3 P.|**

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\\ y &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

lautet die Lösung

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)\mathrm{d}t\\ y(t) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) + du(t).\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Lösung nach einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ für $\mathbf{z}(t)$ und $y(t)$.

Lösung:

a) Das linearsierte System berechnet sich zu

$$\Delta\dot{x} = \exp(-x_R)\Delta u$$
$$a = 0,\, b = \exp(-x_R).$$

Basierend auf der Linearisierung ergibt sich

$$\Delta x_{k+1} = \Delta x_k + \int_0^{T_a} \exp(-x_R)\Delta u_k \mathrm{dt} = \Delta x_k + \exp(-x_R) T_a \Delta u_k$$

mit $\Phi = 1$ *und* $\Gamma = \exp(-x_R)T_a$.

b) Die Abbildung $F(x_k, u_k)$ *lautet*

$$x_{k+1} = \ln(T_a u_k + \exp(x_k)).$$

Die Linearisierung des zeitdiskreten Systems liefert den gleichen Ausdruck wie in 1a:

$$\Delta x_{k+1} = \Delta x_k + \exp(-x_R) T_a \Delta u_k.$$

c) Einsetzen von $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ *liefert*

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\mathbf{z}(t) &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}\mathbf{z}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)\mathrm{d}t \\ y(t) &= \underbrace{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}}\mathbf{z}(t) + \underbrace{d}_{\tilde{d}}\,u(t).\end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $\mathbf{V}^{-1}$ *von links ergibt*

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= \mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}\mathbf{z}_0 + \int_0^t \mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{b}u(\tau)\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)}\mathbf{z}_0 + \int_0^t \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{\Phi}}(t-\tau)}\underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}}_{\tilde{\mathbf{b}}}\,u(\tau)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2. *Sie können die Aufgaben a) und b) unabhängig voneinander lösen.* **10 P.|**

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion folgender Strecke **6 P.|**

$$G(s) = \frac{1 + s\frac{2+\sqrt{3}}{10}}{s(1 + 2 \cdot 0.1\frac{s}{20} + \frac{s^2}{20^2})}.$$

Entwerfen Sie dafür einen kontinuierlichen Regler der Form

$$R(s) = V\frac{1 + 2 \cdot 0.1\frac{s}{20} + \frac{s^2}{20^2}}{s(1 + sT)}.$$

i. Ist das System $G(s)$ sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

ii. Wie heißt die spezielle Struktur des Reglers, welcher angesetzt wurde? 0.5 P.|

iii. Bestimmen Sie die Reglerparameter V und T des Reglers mit Hilfe des Frequenzkennlinienverfahrens, um die gegebenen Anforderungen 4.5 P.|
   - Maximales Überschwingen: 10 %
   - Anstiegszeit: 0.15 s

   einzuhalten.

iv. Kann der geschlossene Regelkreis einer rampenförmigen Referenzgröße ohne bleibender Regelabweichung folgen? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

b) Betrachten Sie nun ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion **4 P.|**

$$G(s) = V\frac{1 - sT}{1 + sT}.$$

i. Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort des Systems. 1.5 P.|

ii. Ist das System phasenminimal? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

iii. Berechnen Sie den Amplitudengang und Phasengang des Systems in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω und skizzieren Sie beide im beiliegenden Bodediagramm in Abbildung 3 für $V = 10$ und $T = 1/100$ s. 2 P.|

Lösung:

a) *$G(s)$ ist nicht sprungfähig. Es wird ein Kompensationsregler angesetzt, um die schwach gedämpfte, konjugiert komplexe Polstelle zu kürzen.*

$$\Phi = 70 - \ddot{\mathrm{u}} = 60^\circ$$
$$\omega_c = \frac{1.5}{t_r} = 10 \text{ rad/s}$$

Die Zeitkonstante errechnet sich zu

$$-\pi + \arctan\left(2+\sqrt{3}\right) - \arctan(\omega_c T) = -\frac{2\pi}{3}$$
$$T = \frac{2-\sqrt{3}}{10}$$

und die Verstärkung zu

$$V = \frac{100\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2}}.$$

Nachdem zwei Integratoren im offenen Kreis vorhanden sind, kann der geschlossene Regelkreis einer rampenförmigen Referenzgröße ohne bleibender Regelabweichung folgen.

b) *Die Sprungantwort im Laplacebereich ist gegeben als*

$$Y(s) = \frac{V}{s}\frac{1-sT}{1+sT}.$$

Rücktransformation in den Zeitbereich z. B. über Partialbruchzerlegung liefert

$$y(t) = V(1-2e^{-t/T})\sigma(t).$$

Das System ist wegen der Nullstelle in der rechten s-Halbebene nicht phasenminimal. Der Amplitudengang

$$|G(I\omega)| = \left|V\frac{1-I\omega T}{1+I\omega T}\right| = V$$

ist unabhängig von der Kreisfrequenz ω. Der Phasengang ergibt sich zu

$$\arg(G(I\omega)) = -2\arctan(\omega T).$$

3. *Sie können die Aufgaben a), b), c) und d) unabhängig voneinander lösen.* **9 P.|**
Gegeben ist die Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen in Abb. 1:

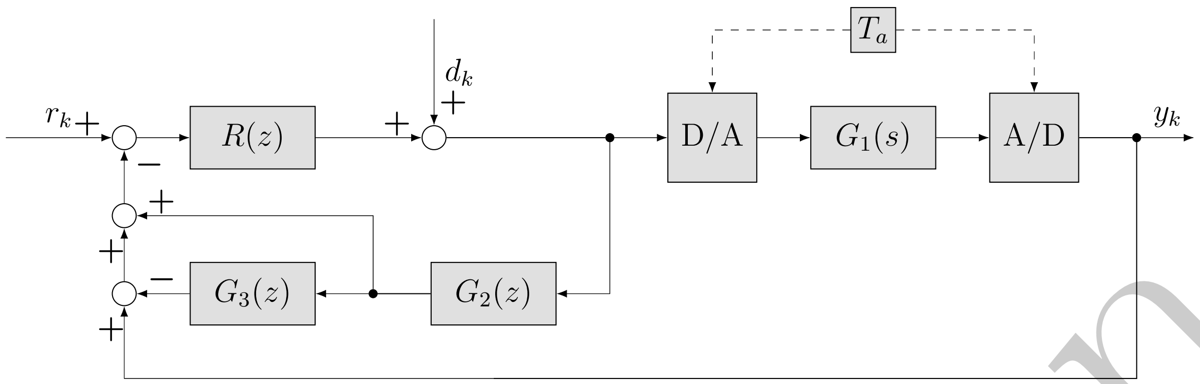

Abbildung 1: Regelkreis für Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion vom Eingang r_k zum Ausgang y_k mit den allgemeinen Übertragungsfunktionen $G_1(z)$, $G_2(z)$, $G_3(z)$ und $R(z)$. **2 P.|**

   Hinweis: Bezeichnen Sie die Kombination aus Halteglied (D/A), kontinuierlicher Übertragungsfunktion $G_1(s)$ und Abtaster (A/D) als $G_1(z)$.

b) Geben Sie für eine allgemeine s-Übertragungsfunktion $G_1(s)$ die zugehörige z-Übertragungsfunktion $G_1(z)$ bei Abtastung und Verwendung eines Halteglieds nullter Ordnung (zero-order-hold) an. **1 P.|**

c) Für die restliche Aufgabe gilt **4 P.|**

$$T_{r,y}(z) = \frac{R(z)G_1(z)}{1 + R(z)G_2(z)} \tag{2}$$

   mit den Übertragungsfunktionen

$$G_1(z) = \frac{4z-2}{z^3-3z^2} \qquad G_2(z) = \frac{4z-2}{z-3} \qquad R(z) = \frac{5z+1}{z-1} \tag{3}$$

   i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{r,y}(z)$. 1 P.|
   ii. Ist das System BIBO stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 2 P.|
   iii. Beurteilen Sie das System $T_{r,y}(z)$ hinsichtlich Sprungfähigkeit und Realisierbarkeit und begründen Sie Ihre Antworten. 1 P.|

d) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit der Standard-Regelkreis in Abb. 2 intern stabil ist? Geben Sie ein Beispiel für realisierbare Übertragungsfunktionen $R(s)$ und $G(s)$ jeweils erster Ordnung so an, dass die interne Stabilität nicht gegeben ist. **2 P.|**

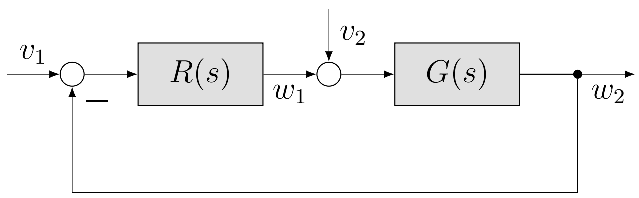

Abbildung 2: Standard-Regelkreis für Aufgabe 3 d).

Lösung:

a)

$$T_{r,y}(z) = \frac{R(z)G_1(z)}{1 + R(z)(G_1(z) + G_2(z) - G_2(z)G_3(z))}$$

*b) siehe Skriptum **6.4.1 Die z-Übertragungsfunktion**: "Berechnung aus einer s-Übertragungsfunktion"*

c) i.

$$T_{r,y}(z) = \frac{20z^2 - 6z - 2}{z^2(21z^2 - 10z + 1)}$$

ii. *ja, BIBO stabil: alle Polstellen* $z_1 = \frac{1}{3}$, $z_2 = \frac{1}{7}$, $z_3 = z_4 = 0$ *im Einheitskreis*

iii. *nicht sprungfähig, realisierbar*

*d) siehe Skriptum **Definition 4.1** (Interne Stabilität)*

4. *Sie können die Aufgaben a), b) und c) unabhängig voneinander lösen.* **11 P.|**
Gegeben ist ein zeitkontinuierliches LTI System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{4a}$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{4b}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie zugehörige Jordansche Normalform und bestimmen Sie die transformierte Transitionsmatrix $\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)$. **2.5 P.|**

b) Bearbeiten Sie die folgenden Punkte und begründen Sie Ihre Antworten. **1.5 P.|**

   i. Kann für das System (4) ein trivialer Beobachter eingesetzt werden? 0.5 P.|

   ii. Was ist die Voraussetzung, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamik des vollständigen Luenberger Beobachters beliebig platziert werden können? Zeigen Sie, ob diese Voraussetzung für das System (4) erfüllt ist. 1 P.|

c) Für das zeitdiskrete System **7 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u_k \tag{5a}$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k \tag{5b}$$

soll ein Luenberger Beobachter und ein Zustandsregler entworfen werden. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Punkte:

   i. Geben Sie das gesamte System mit Luenberger Beobachter und Zustandsregler in Zustandsraumdarstellung an. 3 P.|

   ii. Entwerfen Sie einen Luenberger Beobachter, der den Beobachtungsfehler schnellstmöglich reduziert. Wie viele Zeitschritte k dauert es dabei, um einen allgemeinen Anfangsfehler e_0 auf $e_k = 0$ zu reduzieren? 3 P.|

   iii. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit das Gesamtsystem mit der Kombination aus dem Zustandsbeobachter mit dem Zustandsregler BIBO-stabil ist? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P.|

Lösung:

a)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

b) *i.*

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{e}}$$

ii. *Nein, weil das System nicht global asymptotisch stabil ist.*

iii. *Das System muss vollständig beobachtbar sein.*
Z.B. mit Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{O}\Big(\mathbf{c}^T, \mathbf{A}\Big) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -20 \end{bmatrix}$$

c) *i.*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}}_k \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k) = \Big(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T + \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T\Big)\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T\mathbf{x}_k \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}_k \\ u_k &= \mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned}$$

ii. *Beobachterdynamik mit Eigenwerten bei* $\lambda_{1,2} = 0$.

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ein Anfangsfehler wird in $k = 2$ *Schritten auf* $\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}$ *reduziert.*

iii. *siehe Skriptum "Separationsprinzip"*