Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 12.09.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben sind die Modellgleichungen **4 P.|**

$$\dot{x}_1 = ax_1 + \frac{1}{x_2} + u, x_2 \neq 0 \tag{1a}$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1^2 x_2 - x_2 \tag{1b}$$

$$y = x_1 + 25, \tag{1c}$$

mit dem Systemeingang u und dem Systemausgang y.

i. Berechnen Sie sämtliche Ruhelagen $x_{1,R}$, $x_{2,R}$ und y_R des Systems für $u_R = -1$. Geben Sie außerdem den mathematisch zulässigen Wertebereich für den Parameter a an. 1.5 P.|

ii. Linearisieren Sie das System (1) um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, y_R, u_R)$ und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 2.5 P.|

b) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante und zeitkontinuierliche dynamische System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{2a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u \tag{2b}$$

mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

i. Überprüfen Sie, ob das System (2) asymptotisch stabil ist. 1.5 P.|

ii. Ist das System vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar? Liegt eine minimale Zustandsrealisierung vor? Begründen Sie Ihre Antworten. 1.5 P.|

iii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems. Führen Sie mögliche Pol-Nullstellen-Kürzungen durch. Ist die erhaltene Übertragungsfunktion realisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 2.5 P.|

iv. Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

2. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

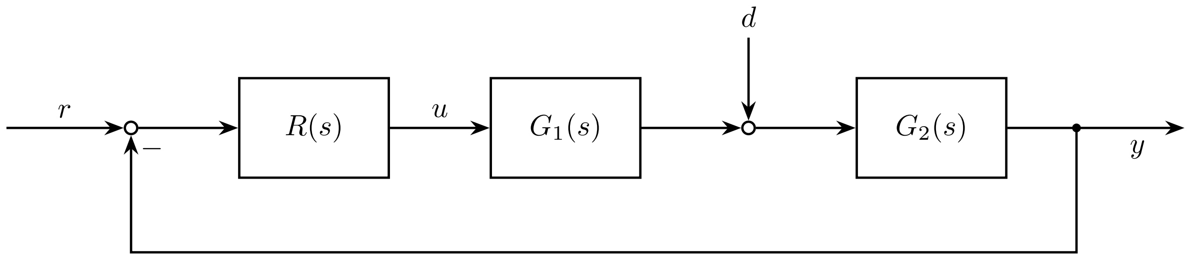

Abbildung 1: Regelkreis

a) Für die Teilstrecken **5 P.|**

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}, G_2(s) = \frac{s+3}{s} \tag{3}$$

soll ein Regler in einem Regelkreis nach Abbildung 1 entworfen werden. Die Struktur des Reglers ist in der Form eines Proportionalgliedes

$$R(s) = V \text{ mit } V > 0, \tag{4}$$

gegeben.

i. Geben Sie für den Regelkreis in Abbildung 1 unter Verwendung der Übertragungsfunktionen der Teilstrecken (3) und des Reglers (4) die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$ sowie die Übertragungsfunktionen $T_{r,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)}$ und $T_{d,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)}$ an. 1.5 P.|

ii. Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor V, sodass für den Regelkreis in Abbildung 1 ohne Störung ($d = 0$) eine Regelabweichung $e_\infty = \frac{1}{2}$ zufolge eines rampenförmigen Testsignals $r(t) = t$ erzielt wird. 1 P.|

iii. Wie bzw. um welchen Anteil muss das Regelgesetz (4) erweitert werden, damit es zu keiner bleibenden Regelabweichung ($e_\infty = 0$) zufolge eines rampenförmigen Testsignals $r(t) = t$ kommt? Formulieren Sie dazu ein möglichst einfaches Regelgesetz als Übertragungsfunktion $R_0(s)$. Ist der geschlossene Regelkreis mit den Teilstrecken (3) und $R_0(s)$ für $V > 0$ BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 2.5 P.|

b) Gegeben ist die Eingangsfolge **5 P.|**

$$u_k = (1^k),\ \ k \geq 0$$

und die resultierende Ausgangsfolge

$$y_k = (0, \alpha, 1, 3, -2, \beta, 0, 0 \ldots),$$

wobei der Index k bei 0 startet ($y_1 = \alpha$).

i. Bestimmen Sie die Impulsantwort (g_k) des Systems sowie die Parameter α und β, sodass $g_k = 0$ für $k \in \{1, 5\}$. 2.5 P.|

ii. Überprüfen Sie anhand der Impulsantwort (g_k) mit den zuvor berechneten Werten für α und β, ob das System BIBO-stabil ist. 0.5 P.|

iii. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems an. Ist die Übertragungsfunktion realisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. 1.5 P.|

iv. Ist das System sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist das zeitdiskrete, lineare, zeitinvariante System **4 P.|**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k \tag{5a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \tag{5b}$$

mit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

i. Geben Sie die Wertebereiche für α und β an, sodass das System (5) vollständig erreichbar, aber nicht vollständig beobachtbar ist. 1 P.|

ii. Nehmen Sie nun an, dass in (5) $\alpha = 1,\ \beta = -3$ gilt. Außerdem ist die inverse Hankelmatrix 3 P.|

$$(\mathbf{H}_d)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -5 & 17 & -6 \\ 2 & -6 & 4/3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

gegeben. Geben Sie die Matrix $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ einer Zustandsrückführung $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k$ an, sodass der geschlossene Regelkreis die Eigenwerte $0,\ 0,\ \frac{1}{2}$ besitzt.
Hinweis: Die inverse Erreichbarkeitsmatrix $\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma})^{-1}$ kann direkt aus (6) und der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma})$ berechnet werden, ohne dass Sie Matrizen invertieren müssen.

b) Für das lineare, zeitinvariante und zeitkontinuierliche dynamische System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{7a}$$

$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \tag{7b}$$

sind die Vektoren $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ sowie die Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2(1 - \mathrm{e}^{-t/2}) \\ 0 & \mathrm{e}^{-t/2} \end{bmatrix}$$

gegeben.

i. Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$. 1 P.|

ii. Berechnen Sie die Ausgangstrajektorie $y(t)$ des Systems (7) für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und den Eingang $u(t) = u_0 \sigma(t)$. 3 P.|

iii. Das System (7) wird nun mit einer Abtastzeit T_a diskretisiert. Geben Sie die Systemmatrizen des diskretisierten Systems 2 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} u_k \tag{8a}$$

$$y_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} u_k \tag{8b}$$

an.

4. *Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **2.5 P.|**

$$G(s) = \frac{1 - \frac{s}{5}}{1 + 5s} \ .$$

Berechnen Sie hieraus die Übertragungsfunktion $G(z)$ für eine allgemeine Abtastzeit T_a.

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **4.5 P.|**

$$G^{\#}(q) = \frac{1 - \frac{q}{5}}{1 + 6q + q^2} \ . \tag{9}$$

Berechnen Sie die Parameter $V,\ T,\ \rho$ der Reglerübertragungsfunktion

$$R^{\#}(q) = \frac{V(1 + qT)}{q^{\rho}}$$

mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens so, dass der geschlossene Regelkreis folgende Spezifikationen erfüllt:

- Anstiegszeit: $t_r = 2.4\text{s}$
- Überschwingen: $\ddot{u} = 2\%$
- Bleibende Regelabweichung: $e_\infty = 0$ bei $r_k = 1^k$.

Hinweis: $\arctan(\frac{1}{10}) \approx 6°$, $\arctan(4) \approx 76°$, $\tan(60°) = \sqrt{3}$.

c) Skizzieren Sie die Betrags- und Phasenkennlinie der Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = -10\frac{s - 10^5}{10^4 + 100s + s^2}$$

in der hinten angefügten Beilage.

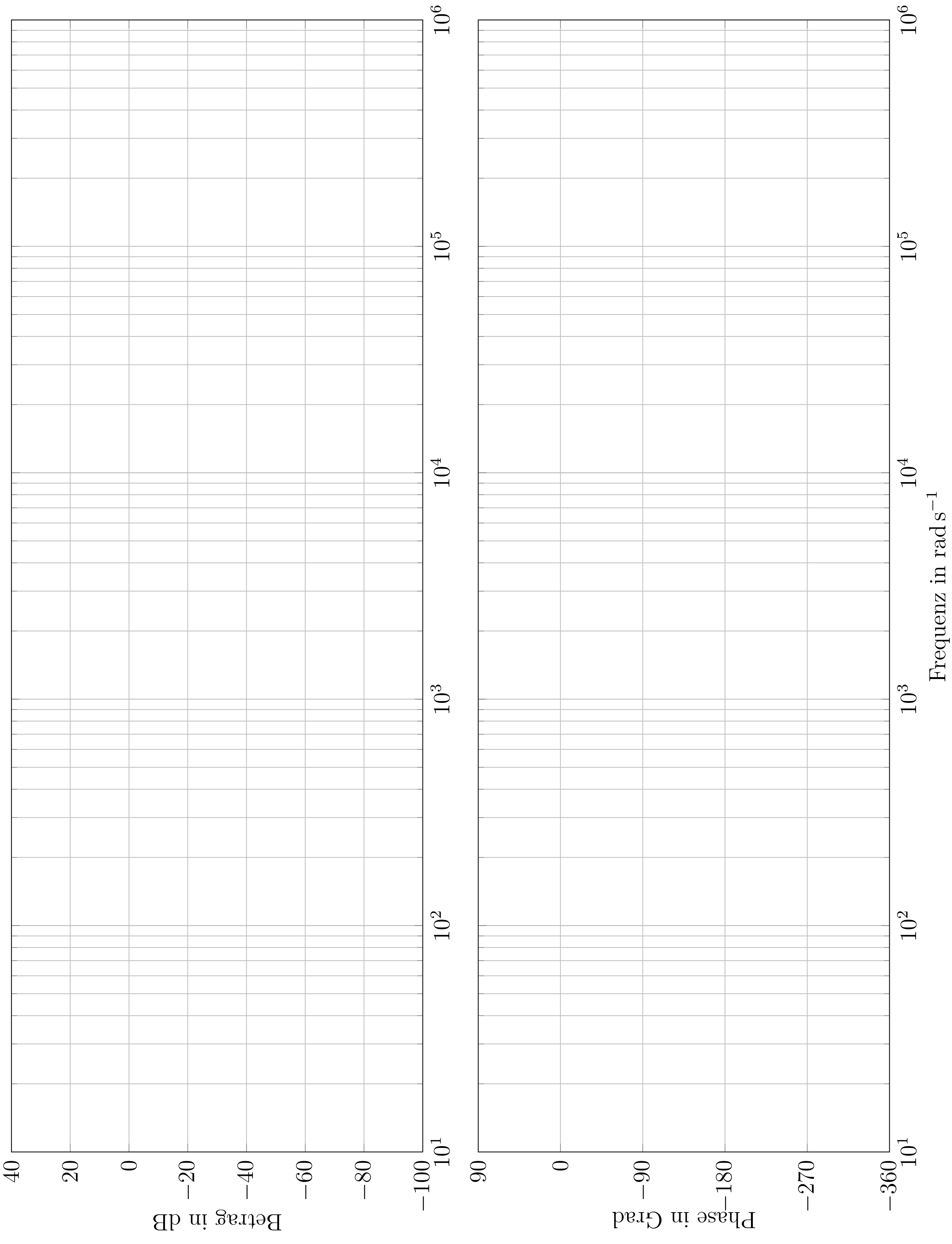

Abbildung 2: Vorlage Bode-Diagramm zu Aufgabe 4c