

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 07.11.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	10	11	9	10	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P. |

a) Gegeben ist ein autonomes dynamisches System

5 P. |

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1(\rho - x_3) - x_2 \quad (1b)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - \frac{8}{3} x_3 \quad (1c)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ und dem konstanten reellwertigen Koeffizienten $\rho > 0$. Der Systemausgang $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ wird durch die Gleichungen

$$y_1 = x_1 + x_1 x_2 \quad (2a)$$

$$y_2 = x_3 \quad (2b)$$

beschrieben.

- i. Berechnen Sie sämtliche reellwertige Ruhelagen \mathbf{x}_R sowie \mathbf{y}_R des Systems. 2 P. |
- ii. Geben Sie jenen Bereich für den Parameter ρ an, in welchem das System genau eine reellwertige Ruhelage besitzt. 1 P. |
- iii. Linearisieren Sie das System (1) und den Ausgang (2) um die allgemeine Ruhelage \mathbf{x}_R und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an. 2 P. |

b) Gegeben ist das dynamische System

5 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (3a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3b)$$

mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Die reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t)$ mit

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

transformiert das System auf Jordansche Normalform.

- i. Bestimmen Sie die transformierte Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}$ sowie den transformierten Eingangsvektor $\tilde{\mathbf{b}}$ und den transformierten Ausgangsvektor $\tilde{\mathbf{c}}$. 2.5 P. |
- ii. Berechnen Sie das Ausgangssignal $y(t)$ des Systems (3) für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ und ein sprungförmiges Eingangssignal $u(t) = \sigma(t)$. 2.5 P. |

Hinweis:

$$\int e^{\alpha\tau} \cos(\beta\tau) d\tau = \frac{e^{\alpha\tau} (\alpha \cos(\beta\tau) + \beta \sin(\beta\tau))}{\alpha^2 + \beta^2}$$
$$\int e^{\alpha\tau} \sin(\beta\tau) d\tau = \frac{e^{\alpha\tau} (\alpha \sin(\beta\tau) - \beta \cos(\beta\tau))}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Lösung:

a) i. Die möglichen Ruhelagen des Systems lauten

- Ruhelage 1: $x_{1,R} = 0, x_{2,R} = 0, x_{3,R} = 0$
- Ruhelage 2: $x_{1,R} = \sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, x_{2,R} = \sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, x_{3,R} = \rho - 1$
- Ruhelage 3: $x_{1,R} = -\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, x_{2,R} = -\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}, x_{3,R} = \rho - 1$

mit

$$y_{1,R} = x_{1,R} + x_{1,R}x_{2,R}$$

$$y_{2,R} = x_{3,R}$$

ii. Für $\rho \leq 1$ wird der Radikand in $\sqrt{\frac{8}{3}(\rho - 1)}$ kleiner bzw. gleich 0, weshalb in diesem Fall nur eine Ruhelage existiert.

iii.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \rho - x_{3,R} & -1 & -x_{1,R} \\ x_{2,R} & x_{1,R} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}$$

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 + x_{2,R} & x_{1,R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}$$

b) i.

$$\tilde{\Phi}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii. Da die Zustandstransformation nur die internen Systemzustände, nicht aber das Ausgangssignal verändert, gilt

$$y(t) = \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\Phi}(t) \mathbf{0} + \int_0^t \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\Phi}(t - \tau) \tilde{\mathbf{b}} u(\tau) d\tau$$

aus dem Faltungssatz folgt mit $u(t) = \sigma(t)$ sowie durch Auflösen der Produkte

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cos(2\tau) d\tau$$

mit dem Ergebnis

$$y(t) = \left(\frac{1}{5} + \frac{e^{-t}(-\cos(2t) + 2\sin(2t))}{5} \right) \sigma(t)$$

2. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

11 P. |

- a) In Abbildung 1 sind die Nyquist-Ortskurven von drei LTI-Systemen $G_i(s)$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben.

5.5 P. |

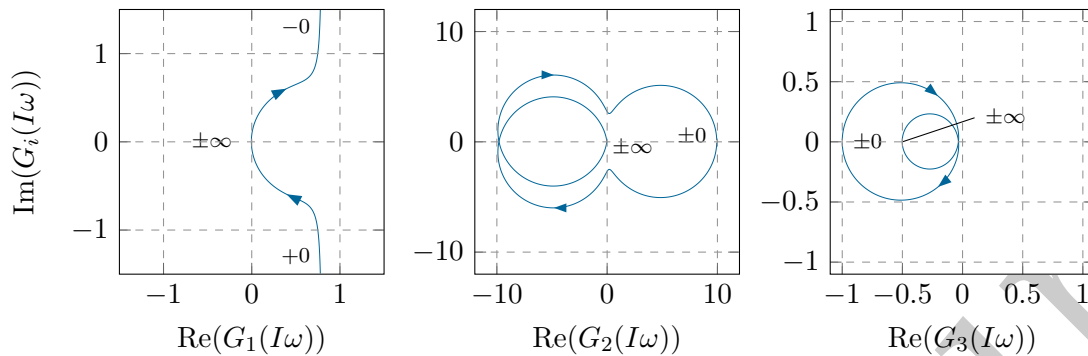


Abbildung 1: Nyquist-Ortskurven von $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$

- i. Zusätzlich zu den Nyquist-Ortskurven sind in Abbildung 3 die Bode-Diagramme der Systeme gegeben. Ordnen Sie die Bode-Diagramme **A-C** den entsprechenden Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$ zu. Begründen Sie jede Zuordnung! 1.5 P. |
- ii. Die Systeme $G_i(s)$ sind wie in Abbildung 2 dargestellt verschalten. Mit r wird die Führungsgröße und mit y die Ausgangsgröße bezeichnet. Weiters wird ein Regler $R(s)$ zur Stabilisierung der Strecke eingesetzt. Bestimmen Sie die allgemeine Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(s)$ des dargestellten Regelkreises mit den allgemeinen Teilübertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ sowie $R(s)$. 2 P. |

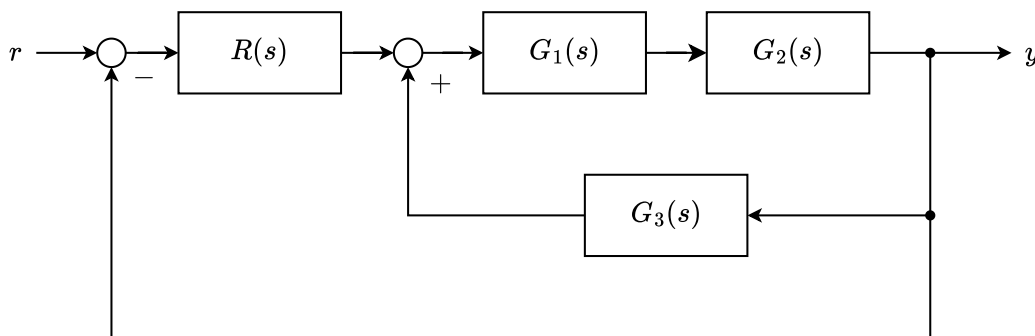


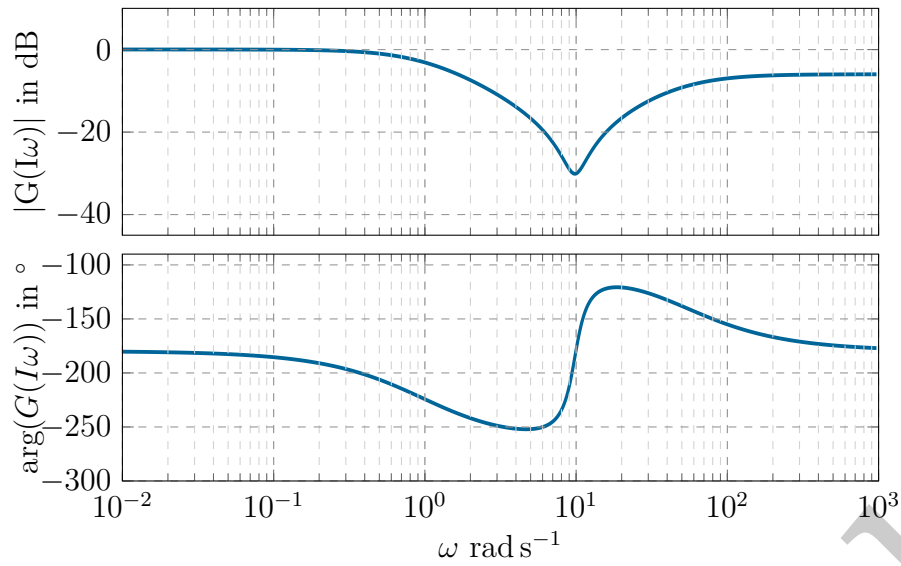
Abbildung 2: Blockschaltbild eines Regelkreises

- iii. In Abbildung 3b (Bode-Diagramm **B**) ist eine Strecke der Form

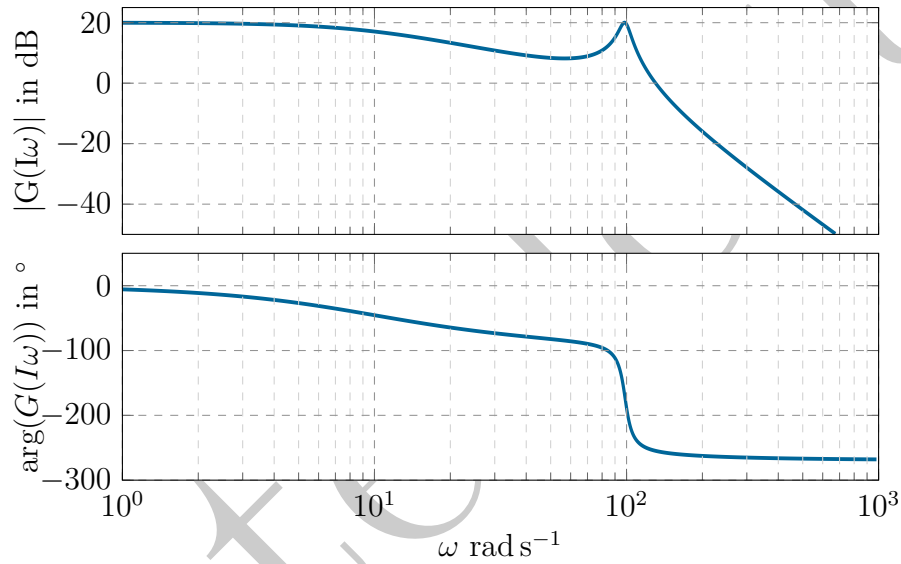
2 P. |

$$G(s) = V \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0} + 1\right) \left(\frac{s^2}{\omega_1^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_1} + 1\right)} \quad (5)$$

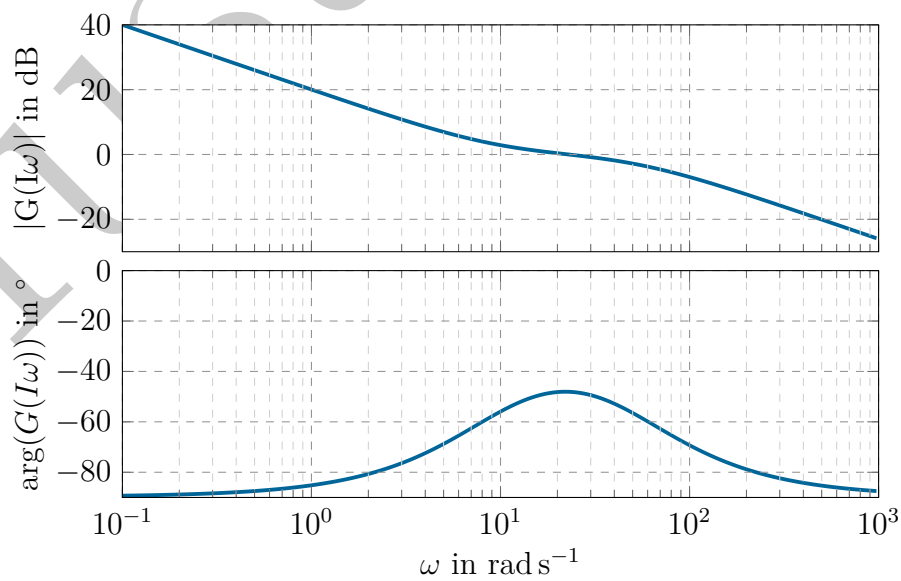
dargestellt. Bestimmen Sie Anhand des Bode-Diagramms die Parameter V , ω_0 , ω_1 und ξ . Sie können dabei annehmen, dass der Verstärkungsfaktor V ein ganzzahliges Vielfaches einer Zehnerpotenz ist. Für die Knickfrequenzen der Polstellen sowie für den Dämpfungsgrad gilt $\omega_0, \omega_1, \xi \in \{a10^b \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$.



(a) **A** - Bode-Diagramm einer Übertragungsfunktion



(b) **B** - Bode-Diagramm einer Übertragungsfunktion



(c) **C** - Bode-Diagramm einer Übertragungsfunktion

Abbildung 3: Bode-Diagramme **A-C** der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$.

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Strecke

5.5 P. |

$$G(s) = \frac{\sqrt{3}}{s(1 + s\sqrt{\frac{3}{4}})} \quad (6)$$

sowie die des Reglers

$$R(s) = V \frac{sT + 1}{s\eta T + 1} \quad (7)$$

mit $0 < \eta < 1$, $V > 0$ und $T > 0$.

- i. Um welchen Regler handelt es sich? Skizzieren Sie die Sprungantwort des Reglers $R(s)$. Beschriften Sie die Sprungantwort und stellen Sie den Zusammenhang zu den Parametern V , T und η der Übertragungsfunktion her. 2 P. |
- ii. Berechnen Sie die Parameter V , T und η der Reglerübertragungsfunktion (7) mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens so, dass der geschlossene Regelkreis folgende Spezifikationen erfüllt: 3.5 P. |
 - Anstiegszeit: $t_r = 0.75 \text{ s}$
 - Überschwingen: $\ddot{u} = 10 \%$
 - Bleibende Regelabweichung: $e_\infty = 0$ bei $r(t) = \sigma(t)$.

Lösung:

- a) i. • $G_1(s) \rightarrow$ Bode-Diagram **C**
- Anhand der Ortskurve ist ersichtlich, dass $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_1(i\omega)| = \infty$ gilt, daher besitzt $G_1(s)$ einen Pol im Ursprung. Bode-Diagram **C** stellt ebenfalls eine Strecke mit einem Pol im Ursprung dar.
 - Die Phase von $G_1(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **C** für $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(I\omega)$ gegen -90° .
 - Der Betrag von $G_1(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **C** für $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(I\omega)$ gegen 0.
 - Die Phase von $G_1(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **C** für $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(I\omega)$ gegen -90° .
 - Der Betrag $G_1(I\omega)$ ist sowohl in der Ortskurve als auch im Bode-Diagram **C** streng monoton fallend.
- $G_2(s) \rightarrow$ Bode-Diagram **B**
- Der Betrag von $G_2(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **B** für $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(I\omega)$ gegen 10.
 - Der Phase von $G_2(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **B** für $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(I\omega)$ gegen 0° .
 - Der Betrag von $G_2(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **B** für $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(I\omega)$ gegen 0.
 - Die Phase von $G_2(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **B** für $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(I\omega)$ gegen 90° .
- $G_3(s) \rightarrow$ Bode-Diagram **A**
- Der Betrag von $G_3(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **A** für $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(I\omega)$ gegen 1.
 - Der Phase von $G_3(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **A** für $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(I\omega)$ gegen -180° .
 - Der Betrag von $G_3(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **A** für $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(I\omega)$ gegen einen wert ungleich 0.
 - Die Phase von $G_3(I\omega)$ geht sowohl in der Ortskurve als auch in Bode-Diagram **A** für $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(I\omega)$ gegen -180° .

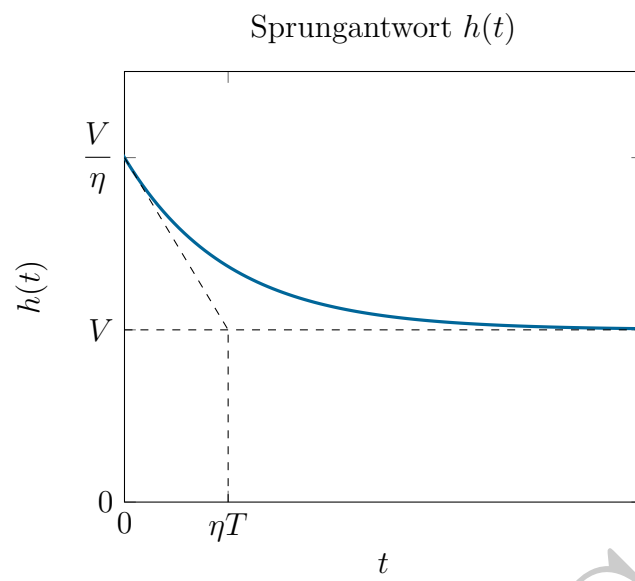
ii.

$$T_{r,y} = \frac{RG_1G_2}{1 - G_1G_2G_3 + RG_1G_2}$$

iii.

$$G(s) = 10 \frac{1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s^2}{100^2} + 2 \cdot 0.05 \cdot \frac{s}{100} + 1\right)}$$

b) i. Es handelt sich um einen Lead-Regler.



ii.

$$V = \frac{4}{3} \quad T = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \eta = \frac{1}{3}$$

3. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

9 P. |

a) Gegeben ist das lineare, zeitinvariante System

5 P. |

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u_k, \quad (8a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \quad (8b)$$

Die Parameter a und b sind konstant und reellwertig.

Hinweis: Beachten Sie die spezielle Struktur des Systems. Die Inversion einer 3 x 3 Matrix ist nicht erforderlich.

- i. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $T_{u,y}(z)$. 2 P. |
 - ii. Welche Bedingung müssen die Parameter erfüllen, damit $T_{u,y}(z)$ BIBO-stabil ist? 1 P. |
 - iii. Angenommen die Bedingung für BIBO-Stabilität ist erfüllt. Wie lautet dann der stationäre Wert des Ausgangs $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ bei einem Einheitsprung des Eingangs $(u_k) = (1^k)$? 2 P. |
- b) Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen, zeitdiskreten Systems der Form 2 P. |

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (9)$$

an.

c) Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes System

2 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (10)$$

mit konstantem Eingang $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$. Welche Fälle können bezüglich der Anzahl der Ruhelagen des Systems auftreten? Geben sie an, wann welcher Fall in Abhängigkeit von \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{u}_R eintritt.

Lösung:

a) i.

$$T_{u,y}(z) = \frac{2+b-z}{(z-b)(z-\frac{1}{2})}$$

ii.

$$-1 < b < 1$$

iii.

$$y_{\infty} = \frac{2(b+1)}{1-b}$$

b) *Siehe Skriptum zur Vorlesung Automatisierung, Kapitel 6.3.*

c) *Siehe Skriptum zur Vorlesung Automatisierung, Kapitel 2.5.*

4. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P. |

a) Gegeben ist das lineare, zeitdiskrete System

6.5 P. |

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (11a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k. \quad (11b)$$

- i. Prüfen Sie das System auf vollständige Erreichbarkeit. 0.5 P. |
- ii. Entwerfen Sie für dieses System einen Dead-Beat Regler. 2 P. |
- iii. In wie vielen Zeitschritten wird eine Anfangsauslenkung \mathbf{x}_0 für den geschlossenen Regelkreis nach $\mathbf{0}$ überführt? 0.5 P. |
- iv. Die Anfangsauslenkung des ersten Zustands ist $x_{1,0} = 1$. Geben Sie jenes Intervall von Anfangsauslenkungen für den zweiten Zustand $x_{2,0}$ an, damit $|u_k| \leq 2$ für $k = 0, 1, 2, \dots$ gilt. 3.5 P. |

b) Für das lineare, zeitdiskrete System

3.5 P. |

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (12a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k, \quad (12b)$$

soll ein Beobachter entworfen werden.

- i. In welcher besonderen Form liegt das System vor? 0.5 P. |
- ii. Geben Sie die allgemeinen Zustandsgleichungen eines vollständigen Luenberger Beobachters und des Beobachtungsfehlers an. Bestimmen Sie den Beobachter so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix bei $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ liegen. 3 P. |

Lösung:

a) i.

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \det \mathcal{R} = 2$$
$$\det \mathcal{R} > 0 \implies \mathcal{R} \text{ hat vollen Rang} \implies \text{vollständig erreichbar}$$

ii.

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

iii. In maximal 2 Zeitschritten.

(Siehe Skriptum zur Vorlesung Automatisierung, Kapitel 8.1.1.)

iv.

$$-\frac{1}{3} \leq x_{2,0} \leq \frac{5}{7}$$

b) In Beobachtbarkeitsnormalform bzw. 2-te Standardform.

(Siehe Skriptum zur Vorlesung Automatisierung, Kapitel 3.5.9.)

c) Zustandsgleichung des Beobachters:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$
$$\hat{y}_k = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + d u_k.$$

Dynamik des Beobachtungsfehlers:

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T) \mathbf{e}_k = \Phi_e \mathbf{e}_k \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0,$$

Zustandsbeobachterentwurf:

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 7/2 \end{bmatrix}.$$