

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 06.02.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	10	12	10	8	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... überprüfen Sie, ob Sie die Angabe zu allen VIER Aufgaben erhalten haben,
- ...rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ...beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ...geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ...begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P.|

a) Gegeben ist die folgende nichtlineare Differentialgleichung

6 P.|

$$\ddot{y}(t) + y(t)\dot{y}(t) - y(t) = u(t) \quad (1)$$

i. Geben Sie die Systemgleichungen in Zustandsraumdarstellung an:

2 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

$$y = h(\mathbf{x}, u). \quad (3)$$

ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen für eine konstante Eingangsgröße $u_R > 0$.

1 P.|

iii. Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, u_R)$ und stellen Sie das linearisierte System mit den Systemmatrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$ und d in Zustandsraumdarstellung dar.

2 P.|

iv. Begründen Sie für die Ruhelage(n) aus ii), ob asymptotische Stabilität vorliegt.

1 P.|

b) Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion

4 P.|

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 2s)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}s\right)}. \quad (4)$$

Entwerfen Sie einen PI-Regler so, dass der geschlossene Regelkreis annäherungsweise die in Abbildung 1 dargestellten Anforderungen der Sprungantwort aufweist mit $t_0 = 0.87s$ und mit $t_1 = 3.87s$.

i. Berechnen Sie die Parameter des PI-Reglers.

3 P.|

ii. Wie groß ist die Steigung der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises zum Zeitpunkt $t = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

1 P.|

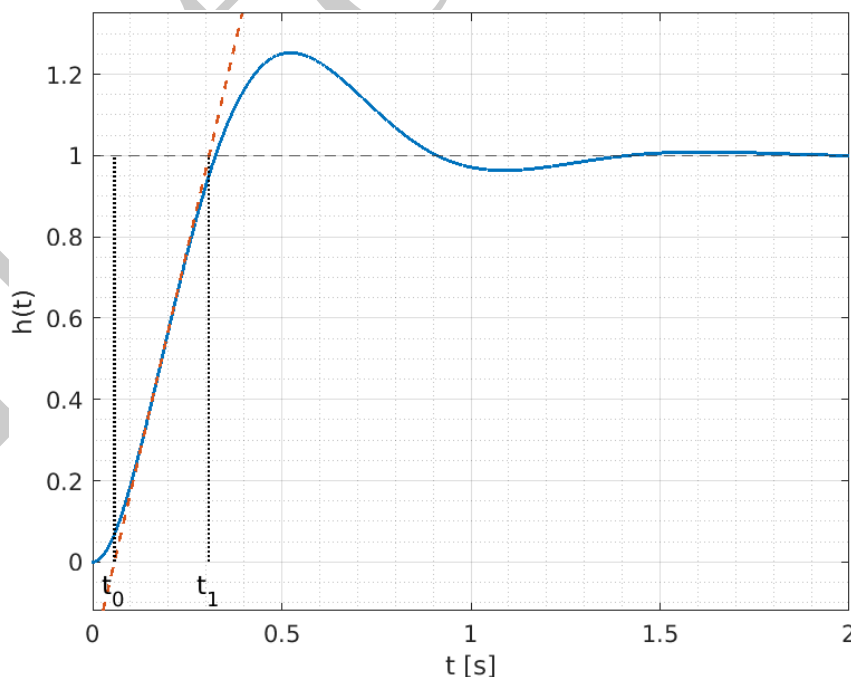


Abbildung 1: Anforderungen der Sprungantwort des geschlossenen Kreises.

Lösung:

a) i.

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1x_2 + x_1 + u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5)$$

$$y = x_1. \quad (6)$$

ii. eindeutige Ruhelage für $u_R > 0$

$$\mathbf{x}_R = \begin{pmatrix} -u_R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

iii.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - x_{2,R} & -x_{1,R} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{c}^T = (1 \ 0), \quad d = 0. \quad (9)$$

iv. Linearisiertes System für Ruhelage aus ii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u_R \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{u_R \pm \sqrt{u_R^2 + 4}}{2}. \quad (11)$$

Da für $u_R > 0$ stets

$$\sqrt{u_R^2 + 4} > u_R$$

gilt, folgt

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0. \quad (12)$$

Somit besitzt das System einen Eigenwert mit positivem Realteil. Die Ruhelage ist daher nicht asymptotisch stabil.

b) i. Überschwingen und Anstiegszeit:

$$\ddot{u} = 25\% \quad t_r = 3 \text{ s.}$$

PI-Regler:

$$R_{PI}(s) = V \frac{1 + sT}{s} \quad (13)$$

mit

$$T = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad V = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (14)$$

ii.

$$T(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad (15)$$

Mit Einheitssprung:

$$Y(s) = T(s) U(s) = \frac{T(s)}{s}. \quad (16)$$

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s)). \quad (17)$$

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sT(s). \quad (18)$$

Für den geschlossenen Kreis gilt:

$$T(s) = \frac{\mathcal{O}(s)}{\mathcal{O}(s^3)}, \quad (19)$$

Somit folgt

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(s^2)}{\mathcal{O}(s^3)} = 0. \quad (20)$$

2. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

12 P. |

a) Gegeben ist der Regelkreis aus Abbildung 2 mit

6 P. |

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT} \right)$$

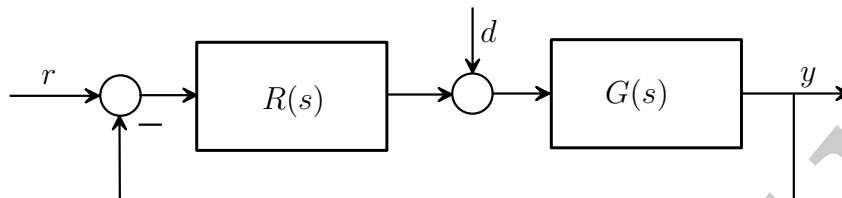


Abbildung 2: Regelkreis zu Aufgabe 2a.

i. Untersuchen Sie, für welchen Wertebereich von K und T der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil ist.

3 P. |

ii. Wie groß ist die bleibende Regelabweichung für $r(t) = 0$ und $d(t) = 10\sigma(t) - 4t\sigma(t)$?

3 P. |

b) Gegeben ist das folgende System.

6 P. |

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d u(t),$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = 0.$$

i. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

1 P. |

ii. Geben Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte an.

1 P. |

2 P. |

iii. Zeigen Sie, dass das System nicht vollständig erreichbar ist. Lässt sich das System durch einen Zustandsregler oder eine Kombination aus Zustandsregler und Zustandsbeobachter stabilisieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

iv. Kann man eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{V} \mathbf{x}$ so finden, dass das System im neuen Zustand $\mathbf{z}$ vollständig erreichbar ist? Beweisen Sie Ihre Aussage!

2 P. |

Lösung:

a) geschlossener Kreis:

$$T(s) = \frac{KTs + K}{Ts^3 + Ts^2 + KTs + K}. \quad (21)$$

Die Koeffizienten des Routh-Hurwitz Verfahrens:

$$a_3 = T, \quad a_2 = T, \quad a_1 = KT, \quad a_0 = K. \quad (22)$$

Der geschlossene Regelkreis ist BIBO-stabil genau dann, wenn

$$K > 0, \quad T > 1. \quad (23)$$

b) Für $r(t) = 0$ gilt

$$e(t) = r(t) - y(t) = -y(t). \quad (24)$$

$$E(s) = -Y(s) = -\frac{Ts}{Ts^3 + Ts^2 + KTs + K} D(s). \quad (25)$$

$$D(s) = \frac{10}{s} - \frac{4}{s^2}. \quad (26)$$

$$e_\infty = \frac{4T}{K}, \quad (K > 0, T > 1). \quad (27)$$

c)

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2. \quad (28)$$

Für $\lambda = -1$: algebraische Vielfachheit: $n_{1,2} = 2$ und geometrische Vielfachheit $g_{1,2} = 1$.

Für $\lambda = 2$: algebraische Vielfachheit: $n_3 = 1$ und geometrische Vielfachheit $g_3 = 1$.

d) Erreichbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}) = 2 < 3.$$

Das System ist nicht vollständig erreichbar.

Der instabile Eigenwert $\lambda = 2 > 0$ ist nicht erreichbar. Das System lässt sich nicht stabilisieren.

e)

3. Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P. |

a) Entwerfen Sie einen Zustandsregler der Form

2.5 P. |

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + gr_k$$

für das System mit Stellgröße u_k und Störung v_k

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_k, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (29a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \quad (29b)$$

- i. In welcher besonderen Form liegt das System (29) vor? Bestimmen Sie die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^T$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ liegen. 2.5 P. |
- b) Gegeben ist nun die Reglerverstärkung $\mathbf{k}^T = \left[0, 1, -\frac{1}{2}\right]$. 4.5 P. |
- i. Bestimmen Sie die bleibende Regelabweichung $e_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} (r_k - y_k)$ abhängig vom Faktor g zufolge einer Eingangssprungfolge $(r_k) = r_0(1^k)$ unter der Annahme $(v_k) = (0^k)$. 2.5 P. |
- ii. Wie kann das Regelgesetz erweitert werden damit die bleibende Regelabweichung e_∞ auch bei unbekannter stationärer Störungen $(v_k) = v_0(1^k)$ Null wird? Zeichnen Sie das zugehörige Blockschaltbild. 2 P. |
- c) In Abbildung 3 ist die Impulsantwortfolge (g_k) eines zeitdiskreten LTI Systems dritter Ordnung gegeben. 3 P. |
- i. Berechnen Sie die Ausgangsfolge (y_k) als Antwort auf die in Abbildung 3 gegebenen Eingangsfolge (u_k) und skizzieren Sie die Lösung in Abbildung 3. 2 P. |
- ii. Ist das System vollständig erreichbar und/oder vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Hankelmatrix. 1 P. |

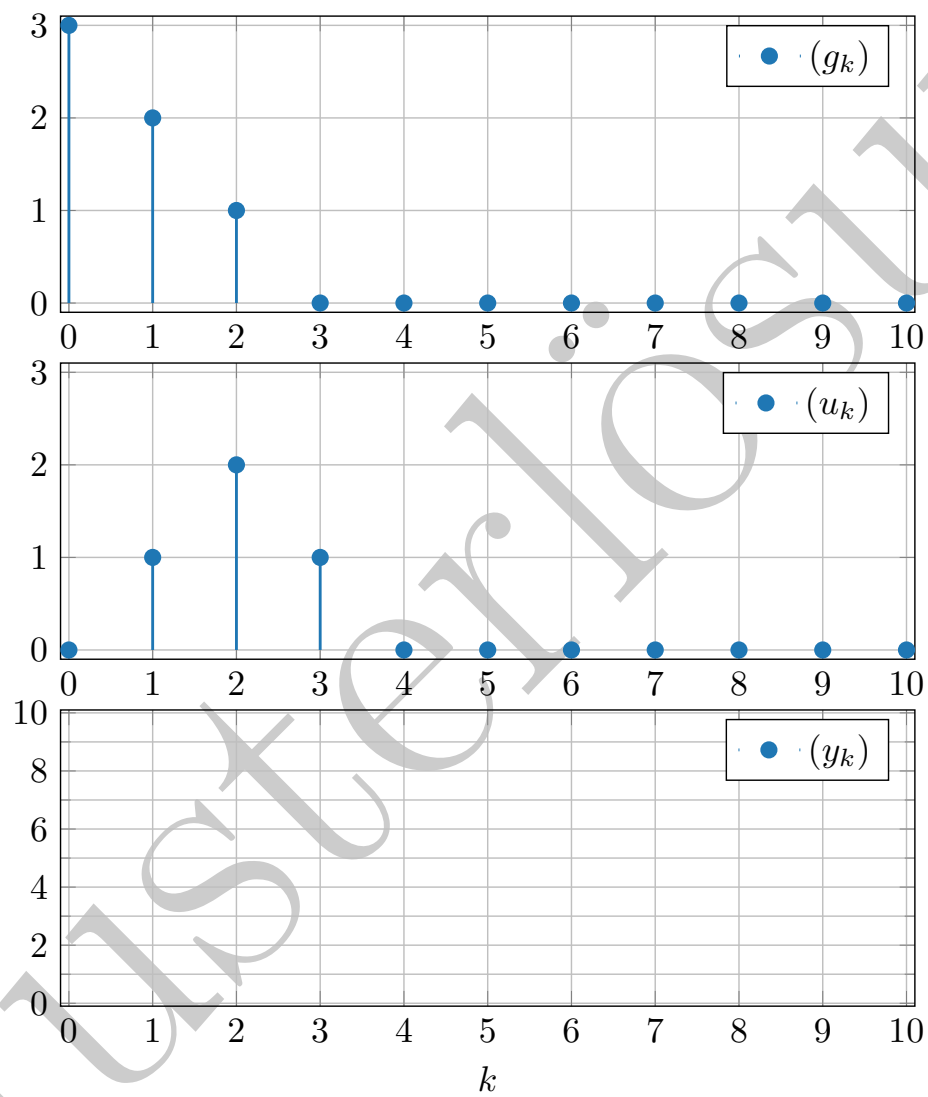


Abbildung 3: Aufgabe 3 c) Impulsantwort eines LTI Systems

Lösung:

- a) i. $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$
- b) i. $e_\infty = (1 - g)r_0$
ii. Siehe Skriptum Kapitel 8.1.2 Der PI-Zustandsregler
- c) i. $(y_k) = (0, 3, 8, 8, 4, 1, 0, \dots)$
ii. $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{rang}(\mathbf{H}) = 2 \neq 3$. Daher ist das zugrundeliegende System dritter Ordnung nicht vollständig erreichbar und/oder nicht vollständig beobachtbar.

4. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

8 P. |

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

4 P. |

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \quad (30)$$

- i. Berechnen Sie die zugehörige z -Übertragungsfunktion $G(z)$ für eine allgemeinen Abtastzeit T_a . 3 P. |
 - ii. Ist die Übertragungsfunktion $G(z)$ BIBO stabil unabhängig von der Wahl der Abtastzeit T_a ? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P. |
- b) Im Folgenden soll die Diskretisierung eines allgemeinen LTI Systems 4 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du$$

mittels explizitem Eulerverfahren

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_a(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k) \quad (31a)$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + du_k \quad (31b)$$

untersucht werden.

- i. Bestimmen Sie die Dynamikmatrix Φ des Abtastsystems (31). 1 P. |
- ii. Wie lauten die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ der Dynamikmatrix Φ , wenn λ_i die Eigenwerte der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ sind. Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung die Beziehung $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ mit dem Eigenwert λ_i und dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{v}_i$. 2 P. |
- iii. Wie muss die Abtastzeit T_a gewählt werden, damit das Abtastsystem (31) für gegebene Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathbf{A}$ asymptotisch stabil ist? 1 P. |

Lösung:

- a) i. $G(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z-1}{z-e^{-2T_a}} - \frac{z-1}{z-e^{-T_a}}$
ii. Ja, aus $z_1 = e^{-T_a}$, $z_2 = e^{-2T_a}$ folgt $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$, für $T_a > 0$.
- b) i. $\Phi = (\mathbf{E} + T_a \mathbf{A})$
ii. Aus $(\mathbf{E} + T_a \mathbf{A}) \mathbf{v}_i = (1 + T_a \lambda_i) \mathbf{v}_i$ folgt $\tilde{\lambda}_i = 1 + T_a \lambda_i$
iii. Mit $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ muss $\sqrt{(1 + \alpha_i T_a)^2 + \beta_i^2} < 1$ erfüllt sein, damit das mittels explizitem Euler Verfahren diskretisierte System stabil ist.