Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 10.04.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	9	11	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

   a) Gegeben ist das lineare, zeitkontinuierliche System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) = \begin{bmatrix} p-4 & 1 \\ p & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}u(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{1a}$$

$$y(t) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t), \tag{1b}$$

   wobei p eine reelle Zahl ist.

   i. Für welche Werte von p ist das System (1) vollständig erreichbar? 1.5 P.|

   ii. Es sei nun $p = 0$. Entwerfen Sie einen Zustandsregler für das System (1), sodass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = -2$ zu liegen kommen. 2 P.|

   iii. Bestimmen Sie den Ausgang $y(t), t \geq 0$, des geschlossenen Regelkreises mit dem allgemeinen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{0,2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 2.5 P.|

   b) Betrachten Sie die nichtlineare Differentialgleichung **4 P.|**

$$m_1\ddot{z} + m_2\dot{z}^5 + m_3 z^3 + m_4 u = 0, \tag{2}$$

   Die Parameter m_1, m_2, m_3 und m_4 sind reelle Zahlen ungleich Null.

   i. Geben Sie eine Zustandsdarstellung von (2) mit dem Eingang u, dem Zustand $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z & \dot{z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und dem Ausgang $y = z$ an. 1 P.|

   ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen von (2) in Abhängigkeit von dem konstanten Eingangswert $u = u_R$. 1 P.|

   iii. Linearisieren Sie die in i. bestimmte Zustandsdarstellung um eine allgemeine Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R, u = u_R, y = y_R$ und geben Sie die Zustandsdarstellung des linearisierten Systems an. 2 P.|

Lösung:

a) i. *Die Erreichbarkeitsmatrix ist*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & p-5 \\ -1 & p+4 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Sie ist regulär (daher ist das System vollständig erreichbar) für $p \neq 1/2$.

ii. *Mithilfe der Verstärkung* $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ *hat* $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ *die gewünschten Eigenwerte.*

iii. *Die Lösung ist*

$$y(t) = \Big(x_{0,1} + \frac{x_{0,2}}{2}\Big)e^{-4t} + \frac{x_{0,2}}{2}e^{-2t} \tag{4}$$

für $t \geq 0$.

b) i.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ y = x_1, \end{cases} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{m_3}{m_1}x_1^3 - \frac{m_2}{m_1}x_2^5 - \frac{m_4}{m_1}u \end{bmatrix}. \tag{5}$$

ii. *Die allgemeine Ruhelage ist* $\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt[3]{-m_3^2 m_4 u_R}}{m_3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $y_R = \frac{\sqrt[3]{-m_3^2 m_4 u_R}}{m_3}$.

iii. *Es ist*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, u)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\frac{m_3}{m_1}x_1^2 & -5\frac{m_2}{m_1}x_2^4 \end{bmatrix}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\frac{\sqrt[3]{m_3 m_4^2 u_R^2}}{m_1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(\mathbf{x}, u)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_4}{m_1} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Das linearisierte System ist

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\frac{\sqrt[3]{m_3 m_4^2 u_R^2}}{m_1} & 0 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_4}{m_1} \end{bmatrix}\Delta u, \tag{8a}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}, \tag{8b}$$

wobei $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$ *und* $\Delta y = y - y_R$.

2. *Die Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung **4 P.|**

$$\dot{y} + \sqrt{3}y = \sqrt{3}u. \tag{9}$$

i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von u nach y. 1 P.|

ii. Es soll nun ein Regler der Form $C(s) = \alpha + \beta/s^n$ entworfen werden, wobei α und β reelle Parameter sind und n eine ganze Zahl ist. Bestimmen Sie den minimalen Wert von n so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Kreises keine bleibende Regelabweichung aufweist. 1 P.|

iii. Berechnen Sie die Parameter α und β so, dass der geschlossene Regelkreis eine Anstiegszeit von $t_r = 0.5$ s und ein Überschwingen von ü $= 10\%$ hat. 2 P.|

b) Betrachten Sie die zeitkontinuierliche Strecke mit der Übertragungsfunktion **3 P.|**

$$G(s) = \frac{V}{(1 + s\tau)^2}, \tag{10}$$

mit $V > 0$ und $\tau > 0$. Das Eingangssignal ist

$$u(t) = \cos(t) \tag{11}$$

für $t \geq 0$. Berechnen Sie V und τ so, dass der eingeschwungene Zustand des Ausgangssignals

$$y(t) = 4\sin(t) \tag{12}$$

ist.

c) Für eine Strecke mit einer rationalen Übertragungsfunktion $G(s)$ wurde ein Regler $R(s)$ so entworfen, dass die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$ die Bedingungen vom Satz 4.6 (siehe Formelsammlung) erfüllt und die Phasenreserve $\Phi = \arg(L(I\omega_C)) + \pi$ bei der Durchtrittsfrequenz ω_C positiv ist. Nehmen Sie nun an, dass $G(s)$ um ein Totzeit-Glied mit der Totzeit T_t erweitert wurde. Wie groß darf T_t maximal sein, damit der geschlossene Regelkreis mit dem Regler $R(s)$ noch stabil ist? Begründen Sie Ihre Antwort! **1.5 P.|**

d) Welche Bedingung muss eine rationale s-, z- und q-Übertragungsfunktion erfüllen, damit diese realisierbar ist? **1.5 P.|**

Lösung:

a) i. $G(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\sqrt{3}}}$.

ii. $n = 1$.

iii. *Mithilfe des Frequenzkennlinienverfahrens ist die Durchtrittsfrequenz* $\omega_C = 1.5/t_r = 3$ *rad/s und die Phasenreserve* $\Phi[°] = 70 - \ddot{u}[\%] = 60°$, *das heißt,* $\Phi = \pi/3$ *rad. Die Gleichung*

$$C(j\omega_C)G(j\omega_C) = \left(\alpha + \frac{\beta}{j3}\right)\frac{1}{1+j\frac{3}{\sqrt{3}}} = e^{-j(\pi-\frac{\pi}{3})} \tag{13}$$

ist für $\alpha = 1$ *und* $\beta = 3\sqrt{3}$ *erfüllt.*

b) *Es ist* $y(t) = 4\sin(t) = 4\cos(t - \pi/2)$. *Die Gleichung*

$$G(j1) = \frac{V}{(1+j\tau)^2} = 4e^{-j\pi/2} \tag{14}$$

ist für $V = 8$ *und* $\tau = 1$ *erfüllt.*

c) $T = \Phi/\omega_C$.

d) *Siehe im Skriptum den Satz 3.6 für den s-Bereich, den Satz 6.4 für den z-Bereich und die Formel (6.103) für den q-Bereich.*

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **9 P.|**

a) Gegeben ist ein PI-Regler der Form **5.5 P.|**

$$u(t) = K_p e(t) + K_I e_I(t) \tag{15}$$

mit dem Reglereingang $e(t)$, dem Reglerausgang $u(t)$ und $e_I(t) = \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$.

i. Zeichnen Sie das Strukturschaltbild des PI-Reglers. Nutzen Sie dafür nur die in Abbildung 1 dargestellten gängigen Blöcke und Symbole. Der Parameter g des Verstärkers kann ein Skalar, ein Vektor oder eine Matrix sein. 1 P.|

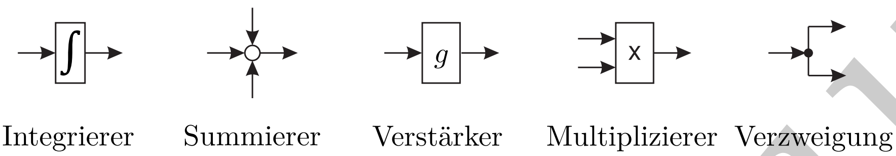

Abbildung 1: Einige wesentliche Blöcke und Symbole für Strukturschaltbilder.

ii. Erweitern Sie das Strukturschaltbild des PI-Reglers, indem Sie den Integralanteil $e_I(t)$ über einen Verstärkungsfaktor d auf den Reglereingang zurückführen. Die Rückführung soll so erfolgen, dass $e(t) = \tilde{e}(t) - d e_I(t)$ mit einem neuen Reglereingang $\tilde{e}(t)$ gilt. 2 P.|

iii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des PI-Reglers mit Rückführung des Integralzustands gemäß ii) von $\tilde{e}(t)$ zu $u(t)$. Für welche Werte von d stellt diese Übertragungsfunktion ein Lead-Glied dar? 2.5 P.|

b) Geben Sie die Vorschrift zur Berechnung der Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand für den in Abbildung 2 dargestellten Regelkreis mit der Abtastzeit T_a und $d(t) = \sin(2t + \pi/6)e^{-t} + 5\sin(3t + \pi/12)$ an. **3.5 P.|**

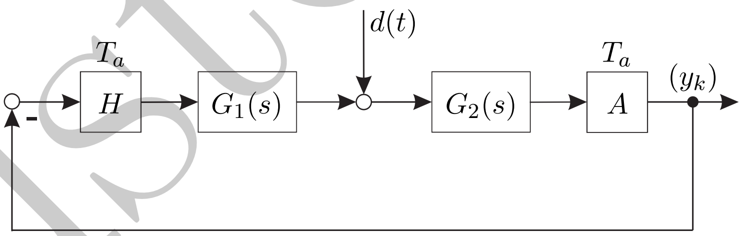

Abbildung 2: Regelkreis mit Halteglied und Abtaster.

Lösung:

a) i. *Abbildung 3 zeigt das Strukturschaltbild eines PI-Reglers.*

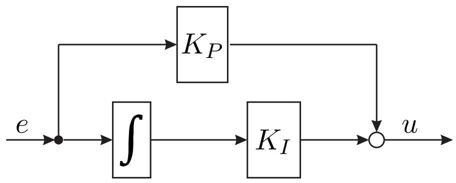

Abbildung 3: Strukturschaltbild eines PI-Reglers.

ii. *Abbildung 4 zeigt das Strukturschaltbild eines PI-Reglers mit Rückführung des I-Anteils.*

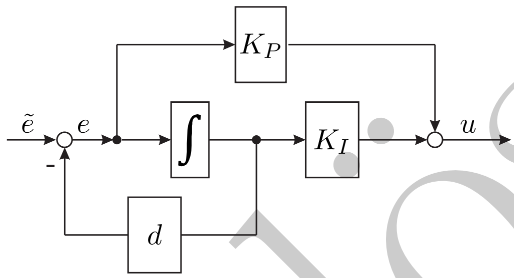

Abbildung 4: Strukturschaltbild eines PI-Reglers mit Rückführung des I-Anteils.

iii. $G(s) = \frac{K_I + sK_p}{d+s}$. *Für* $d > K_I/K_p$.

b) *Im eingeschwungenen Zustand gilt:*

$$(y_k) = \left|\bar{G}(e^{3IT_a})\right| |G_2(3I)| 5 \sin\Big(3kT_a + \pi/12 + arg(G_2(3I)) + arg\Big(\bar{G}(e^{3IT_a})\Big)\Big)$$

mit $\bar{G}(z) = \frac{1}{1+G(z)}$ *und* $G(z) = \frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\Big\{\frac{G_1(s)G_2(s)}{s}\Big\}$.

4. *Die Aufgaben a), b), und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **11 P.|**

a) Für den einfachen Regelkreis von Abbildung 5 wurde ein Regler $R(s)$ so ent- **3 P.|**

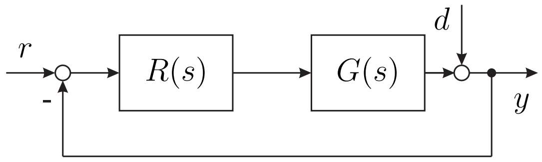

Abbildung 5: Einfacher Regelkreis.

worfen, dass die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $L(s)$ die Bedingungen $|L(\mathrm{I}\omega)| \ll 1$ für $\omega \gg \omega_C$ und $|L(\mathrm{I}\omega)| \gg 1$ für $\omega \ll \omega_C$ mit der Durchtrittsfrequenz ω_C erfüllt. Skizzieren Sie die typischen Betragsfrequenzgänge von $L(s)$, $T_{r,y}(s)$ und $T_{d,y}(s)$.

b) In Abbildung 6 ist die Sprungantwort $h(t)$ eines Verzögerungsgliedes 2-ter Ordnung dargestellt. **4.5 P.|**

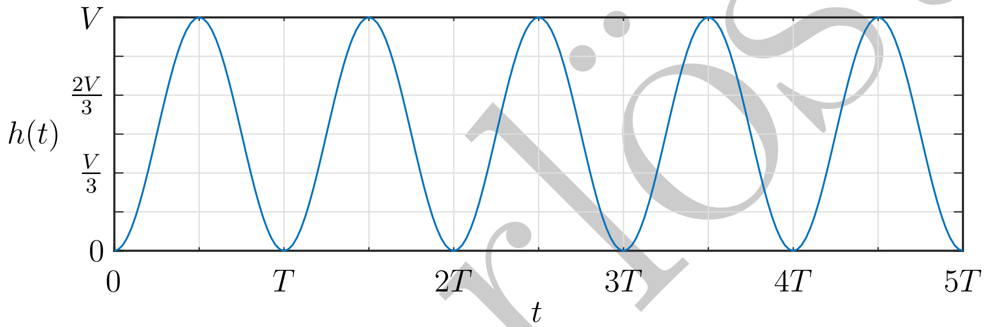

Abbildung 6: Sprungantwort einer Übertragungsfunktion 2-ter Ordnung.

i. Schreiben Sie die Sprungantwort $h(t)$ als Funktionen der Zeit t explizit an. 2 P.|

ii. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von $G(s)$. 1.5 P.|

iii. Ist dieses System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

c) Zeigen Sie allgemein die Gültigkeit des Separationsprinzips für lineare, zeitinvariante Abtastsysteme. **3.5 P.|**

Lösung:

a) Die typischen Betragsfrequenzgänge sind in Abblidung 7 dargestellt.

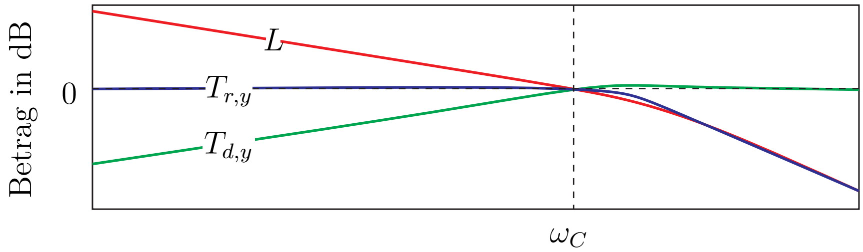

Abbildung 7: Betragsgang von $L(s)$, $T_{r,y}(s)$ and $T_{d,y}(s)$.

b) i. Die Sprungantwort $h(t)$ lautet

$$h(t) = \frac{V}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)\sigma(t).$$

ii. Die Übertragungsfunktion $G(s)$ ergibt sich zu

$$G(s) = \frac{V}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

iii. Nein, da die Impulsantwort $g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)$ des Systems nicht absolut integrabel ist.

c) Siehe Skriptum, Satz 8.6.