Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 29.05.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
erreichbare Punkte	10	11	10	9	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

   a) Gegeben sind die Modellgleichungen **4 P.|**

$$\dot{\alpha}(t) = \beta(t), \tag{1a}$$
$$0 = \frac{1}{\gamma(t)}\Big(p_1 u(t) - p_2\gamma(t)\Big) - \frac{1}{p_3}\dot{\beta}(t), \tag{1b}$$
$$u(t) = p_4 - \dot{\gamma}(t), \tag{1c}$$

   mit dem Systemeingang u und den Parametern p_1, p_2, p_3, p_4, wobei gilt $p_2 \neq 0$, $p_3 \neq 0$.

   i. Geben Sie (1) in Zustandsraumdarstellung 1 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) \tag{2}$$

   an. Wählen Sie dazu einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$.

   ii. Berechnen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ und u_R des nichtlinearen Systems. 1 P.|

   iii. Linearisieren Sie (2) um die Trajektorie 2 P.|

$$\tilde{\gamma} = \gamma_0 - p_5 t, \tag{3a}$$
$$\tilde{\beta} = -p_2 t - p_1 \ln\left(\frac{\gamma_0 - p_5 t}{\gamma_0}\right), \tag{3b}$$
$$\tilde{\alpha} = -\frac{1}{2}p_2 t^2 + p_1 t - p_1 \ln\left(\frac{\gamma_0 - p_5 t}{\gamma_0}\right)\left(t - \frac{\gamma_0}{p_5}\right), \tag{3c}$$

   für die Parameterwerte $p_3 = 1$, $p_4 = 0$. Gegeben sind außerdem eine konstante Eingangstrajektorie $\tilde{u}(t) = p_5$ und die Anfangswerte $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}_0 = 0$, $\tilde{\beta}(0) = \tilde{\beta}_0 = 0$ sowie $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0$.

   b) Gegeben ist das zeitkontinuierliche dynamische System **6 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u, \tag{4a}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \tag{4b}$$

   mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

   i. Kann für das System (4) ein trivialer Beobachter entworfen werden? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

   ii. Lässt sich das System (4) durch einen Zustandsregler stabilisieren? Begründen Sie ausführlich Ihre Antwort. 2 P.|

   iii. Entwerfen Sie für das System (4) einen vollständigen Luenberger-Beobachter so, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamik bei $\lambda_{1,2} = -1$ zu liegen kommen. 3 P.|
   Hinweis: Verwenden Sie die Formelsammlung.

Lösung:

a) *i.*

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= x_2(t),\ x_1(0) = x_{1,0} \\
\dot{x_2}(t) &= \frac{p_3}{x_3(t)}\Big(p_1 u(t) - p_2 x_3(t)\Big),\ x_2(0) = x_{2,0} \\
\dot{x_3}(t) &= p_4 - u(t),\ x_3(0) = x_{3,0}
\end{aligned}
$$

ii. $x_{1,R} = x_{1,0}$, $x_{2,R} = 0$, $x_{3,R} = \frac{p_1 p_4}{p2}$, $u_R = p_4$

iii. *Das linearisierte System um die gegebene Trajektorie ist*

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\\ \Delta x_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{p_1 \tilde{u}(t)}{\tilde{x}_3(t)^2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\\ \Delta x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{p_1}{\tilde{x}_3(t)}\\ -1\end{bmatrix}\Delta u(t),
$$

und eingesetzt für die Trajektorie ergibt sich

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\\ \Delta x_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{p_1 p_5}{(x_{3,0} - p_5 t)^2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1(t)\\ \Delta x_2(t)\\ \Delta x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{p_1}{x_{3,0} - p_5 t}\\ -1\end{bmatrix}\Delta u(t).
$$

b) *i. Die Eigenwerte des Systems sind* $\lambda_1 = 3$ *und* $\lambda_2 = 4$. *Das System ist nicht asymptotisch stabil. Daher kann für dieses System kein trivialer Beobachter entworfen werden, da das System asymptotisch stabil sein müsste.*

ii. Die Erreichbarkeitsmatrix

$$
\mathcal{R} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}
$$

hat Rang 1. Daher lässt sich das instabile System nicht vollständig stabilisieren. Allerdings kann der Zustand x_1 *stabilisiert werden, da dieser erreichbar ist.*

iii. $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix}-17 & -8\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

2. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **11 P.|**

a) Gegeben ist das System **5.5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{5a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{5b}$$

mit einem allgemeinen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Berechnen Sie alle möglichen Werte für den Parameter α, sodass die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ NICHT diagonalisierbar ist. Berechnen Sie für alle ermittelten Werte von α die Transformationsmatrix $\mathbf{V}$, um die Dynamikmatrix auf Jordansche Normalform zu bringen. 2.5 P.|

ii. Geben Sie für eine allgemeine Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$ an, wie sich die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und die Eingangs-/Ausgangsvektoren $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ des transformierten Systems 1 P.|

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u$$
$$y = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$$

aus dem ursprünglichen System ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$) errechnen.

iii. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des LTI-Systems. 1 P.|

iv. Sie legen einen Sprung $u(t) = \beta\sigma(t)$ an das System an. Welchen Wert muss die Sprunghöhe β besitzen, damit sich nach dem Abklingen aller transienten Vorgänge der Wert $y = 1$ am Ausgang einstellt? 1 P.|

b) Für das lineare, zeitkontinuierliche System **5.5 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

soll das zugehörige zeitdiskrete System für ein Halteglied nullter Ordnung bestimmt werden.

i. Zeigen Sie in einem ersten Schritt, dass für die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des zeitkontinuierlichen Systems gilt 1 P.|

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t).$$

ii. Geben Sie für die Abtastzeit T_a die Berechnungsvorschrift für die Dynamikmatrix und die Eingangsmatrix des Abtastsystems 1 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}_d\mathbf{u}_k$$

an.

iii. Nehmen Sie an, dass $\mathbf{A}$ regulär ist. In diesem Fall lässt sich das Integral für $\mathbf{\Gamma}_d$ analytisch auswerten. Geben Sie diesen Ausdruck an, sodass er nur noch Matrixmultiplikationen enthält und nutzen Sie die Eigenschaften der Transitionsmatrix, um den Ausdruck zu vereinfachen. Kennzeichnen Sie in Ihrer Rechnung den Schritt, in welchem Sie die Regularität von $\mathbf{A}$ ausnutzen. 1.5 P.|
Hinweis: Nutzen Sie die Beziehung aus i.

iv. Die Abtastzeit wird von T_a auf $2T_a$ verdoppelt. Geben Sie einen Ausdruck für die Dynamikmatrix $\tilde{\mathbf{\Phi}}_d$ und der Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_d$ des zeitdiskreten Systems mit doppelter Abtastzeit als Funktion von $\mathbf{\Phi}_d$ und $\mathbf{\Gamma}_d$ des Originalsystems an. 2 P.|
Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaften der Transitionsmatrix.

Lösung:

a) *i.*

$$\alpha = -4$$

mögliche Lösung (nicht eindeutig)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ii.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{V}$$

iii.

$$G(s) = \frac{1}{s+4}$$

iv.

$$\beta = 4$$

b) *i.* *Möglicher Weg: Taylorreihenentwicklung von* $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \cdots$ *und ableiten.*

ii. *s. Abschnitt 6.2.2*

iii.

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{B} = (\mathbf{\Phi} - \mathbf{E})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

iv.

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi}^2$$

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}$$

3. *Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **10 P.|**

a) Gegeben ist ein zeitdiskretes LTI-System, das durch die Differenzengleichung **3 P.|**

$$y_k + 2y_{k-1} + y_{k-2} = u_k + 10u_{k-1}, \tag{6}$$

mit dem Systemeingang u_k und dem Systemausgang y_k zum Zeitschritt k beschrieben wird.

i. Leiten Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ her und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. 1 P.|

ii. Bestimmen Sie Pol- und Nullstellen von $G(z)$. Ist das System sprungfähig? Ist das System BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antworten. 2 P.|

b) Für eine zeitdiskrete Strecke mit der q-Übertragungsfunktion **7 P.|**

$$G^{\#}(q) = \frac{1}{3q + \sqrt{3}} \tag{7}$$

soll ein zeitdiskreter PI-Regler entworfen werden.

i. Überprüfen Sie, ob (7) für die Abtastzeit $T_a = 0{,}5$ s realisierbar ist. Begründen Sie Ihre Aussage. 1 P.|

ii. Geben Sie die q-Übertragungsfunktion $R^{\#}(q)$, die z-Übertragungsfunktion $R(z)$ sowie die Zustandsrealisierung als Differenzengleichung für den zeitdiskreten PI-Regler an. 2 P.|

iii. Bestimmen Sie die Parameter der q-Übertragungsfunktion des zeitdiskreten PI-Reglers so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises folgende Vorgaben erfüllt: 3 P.|

- Überschwingen: 10 %
- Anstiegszeit: 1,2 s
- Keine bleibende Regelabweichung für die Eingangsfolge (1^k).

Hinweis: Nutzen Sie für die Berechnung die Formelsammlung.

iv. Wie ist der entworfene Regler in einem ersten Schritt zu erweitern, wenn auch eine Eingangsfolge (kT_a) zu keiner bleibenden Regelabweichung führen soll? Geben Sie die Übertragungsfunktion $R_2^{\#}(q)$ des neuen Reglers explizit an und begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

Lösung:

a) *i.*

$$G(z) = \frac{z(z+10)}{(z+1)^2}$$

ii.

- *Nullstellen:* $z_1 = 0,\ z_2 = -10,$ *Polstellen:* $n_1 = n_2 = -1$
- *Das System ist nicht BIBO-stabil, da sich die Pole nicht innerhalb des Einheitskreises befinden. Es ist sprungfähig, da der Zählergrad der Übertragungsfunktion* $G(z)$ *gleich dem Nennergrad von* $G(z)$ *ist.*

b) *i.* *Das System ist realisierbar, da* $G^{\#}(\Omega_0) = \frac{1}{12+\sqrt{3}} < \infty$.

ii.

$$R^{\#}(q) = \frac{V_I(1+qT_I)}{q},$$

$$R(z) = V_I\left(T_I + \frac{T_a}{2}\right) + \frac{T_a V_I}{z-1}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + T_a V_I u_k, \\ y_k &= x_k + V_I\left(T_I + \frac{T_a}{2}\right)u_k \end{aligned}$$

iii.

$$V_I = 3,\ T_I = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

iv. *Es müsste ein weiterer Integrator hinzugefügt werden, damit ein rampenförmiges Eingangssignal zu keiner bleibenden Regelabweichung führt. Eine zusätzliche Nullstelle im Zähler kann für die erforderliche Phasenanhebung sorgen. Möglich wäre folgender Ansatz:*

$$R_2^{\#}(q) = \frac{V_I(1+qT_I)(1+qT)}{q^2}.$$

4. *Die Aufgaben a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden.* **9 P.|**

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises **3 P.|**

$$L(s) = \frac{z(s)}{n(s)s^N}$$

mit den allgemeinen Polynomen

$$z(s) = \sum_{i=0}^{N_z} b_i s^i, \qquad b_i \in \mathbb{R} \qquad b_0, b_{N_z} \neq 0$$
$$n(s) = \sum_{i=0}^{N_n} a_i s^i, \qquad a_i \in \mathbb{R} \qquad a_0, a_{N_n} \neq 0\ .$$

i. Leiten Sie eine allgemeine Beziehung für die Anzahl der minimal erforderlichen Integratoren N im offenen Regelkreis $L(s)$ ab, sodass der bleibende Regelfehler $e(t) = r(t) - y(t)$ des geschlossenen Regelkreises für das Referenzsignal $r(t) = t^l \sigma(t)$ mit allgemeinem $l \in \mathbb{N}$ für $t \to \infty$ verschwindet. Nehmen Sie hierfür an, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist. 2 P.|
Hinweis: $\mathcal{L}\{t^l \sigma(t)\} = l!/s^{l+1}$.

ii. Berechnen Sie für $N = l$ den bleibenden Regelfehler $e(t) = r(t) - y(t)$ des geschlossenen, stabilen Regelkreises. 1 P.|

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion **2 P.|**

$$G(s) = \frac{1}{as^7 + 5as^5 + 2as^4 + s^3 + Ks^2 + 7s + 4}.$$

i. Ist $G(s)$ für $a = 1$ und $K = 3$ BIBO-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. 0.5 P.|

ii. Für welchen Wertebereich von K ist $G(s)$ für $a = 0$ BIBO-stabil? 1.5 P.|

c) Von dem LTI-System **2 P.|**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}.$$

ist eine Messung des Ausgangs $y(t) = 3\exp(-5t)\cos(\omega_0 t)$ mit allgemeinem Parameter ω_0 bekannt.

Geben Sie eine mögliche Realisierung $\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{x}_0$ an. Nehmen Sie hierfür ein autonomes ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), vollständig beobachtbares System an. Zeigen Sie ausführlich, wie Sie zu dieser Wahl gekommen sind und warum diese Wahl korrekt sein sollte!

d) Skizzieren Sie das Bodediagramm von **2 P.|**

$$G(s) = 10^{-3} \frac{1 + 100s}{1 + 2 \cdot 0.05 \frac{s}{5} + \left(\frac{s}{5}\right)^2}$$

in der beiliegenden Vorlage.

Lösung:

a) *i.*

$$N = l + 1$$

ii.

$$e(\infty) = l!\frac{a_0}{b_0}$$

b) *i.* *Nicht BIBO-stabil*

ii.

$$K > \frac{4}{7}$$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & \omega_0 \\ -\omega_0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$