

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung
am 03.07.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	10	10	8	12	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden. Alle Fragen in dieser Aufgabe beziehen sich auf dasselbe zeitdiskrete dynamische System **10 P.**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_k, \quad (1a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \quad (1b)$$

- a) Gegeben ist das System (1). **6 P.**
- i. Überprüfen Sie die Stabilität und Beobachtbarkeit des Systems. **2 P.**
 - ii. Transformieren Sie das System mittels Zustandstransformation $\mathbf{x}_k = \mathbf{V}\mathbf{z}_k$ auf Jordansche Normalform. Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}$, sowie die Eingangs- und Ausgangsmatrizen $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\mathbf{c}}$. **3 P.**
 - iii. Nehmen Sie an, dass das System durch Abtastung eines zeitkontinuierlichen Systems mit einer Abtastzeit von $T_a = 2$ s erhalten wurde. Bestimmen Sie die Pole dieses zeitkontinuierlichen Systems. **1 P.**
- b) Für das System (1): **4 P.**
- i. Entwerfen Sie einen Dead-Beat-Beobachter. **3 P.**
 - ii. Geben Sie die Zustandsraumdarstellung eines vollständigen Beobachters an. **1 P.**

Lösung:

- a) i. Die Eigenwerte des Systems sind $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 4$.

$$|\lambda_i| > 1 \Rightarrow \text{instabil}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

hat Rang 2. Daher ist das System vollständig beobachtbar.

- ii. Für die Jordan-Normalform wird die Eigenvektormatrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

oder eine andere äquivalente Matrix verwendet. Die entsprechende Inverse ist

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die resultierenden Matrizen sind

$$\tilde{\Phi} = \mathbf{V}^{-1} \Phi \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \mathbf{V}^{-1} \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- iii. Die Pole des zeitkontinuierlichen Systems sind

$$p_1 = \frac{\ln(\lambda_1)}{T_a} = \frac{\ln(8)}{2}, \quad p_2 = \frac{\ln(\lambda_2)}{T_a} = \frac{\ln(4)}{2}$$

- b) i. Dead-Beat-Beobachter: Die Eigenwerte der Dynamikmatrix Φ_e des Fehlersystems werden auf Null gesetzt. Mit Ackermann's Formel oder durch Vergleich der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms wird der Beobacherverstärkungsvektor berechnet als

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -12 \\ 52 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- ii. Die Zustandsraumdarstellung des vollständigen Beobachters lautet

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k. \end{aligned}$$

2. Die Aufgaben a), b), und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P. |

a) Gegeben ist die Transitionsmatrix des autonomen Systems

5 P. |

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-2t} - e^{-t} & (14/3)e^{-2t} - 4e^{-3t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^{-2t} - 5e^{-t} + e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

i. Geben Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems an.

2 P. |

ii. Gegeben ist der Zustand $\mathbf{x} = [e^{-2}, 0, 0]^T$ zur Zeit $t = 1$. Berechnen Sie den Zustand zur Zeit $t = 0$.

1 P. |

iii. Geben Sie einen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ sowie eine skalare Funktion $\gamma(t)$ so an, dass sich die Lösung des Systems in der Form $\mathbf{x}(t) = \gamma(t)\mathbf{x}_0$ darstellt.

2 P. |

Hinweis: Falls Sie Aufgabe 2.a)i. nicht gelöst haben und damit $\mathbf{A}$ nicht zur Verfügung steht, geben Sie die Vorgehensweise an, wie Sie dies schrittweise genau berechnen würden für gegebenes $\mathbf{A}$.

b) Identifizieren Sie in Abbildung 1 eine Sprungantwort aus $\{h_0(t), h_1(t), h_2(t), h_3(t)\}$, die zur Sprungantwort der Übertragungsfunktion

2 P. |

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 1}$$

passt. Begründen Sie Ihre Antwort.

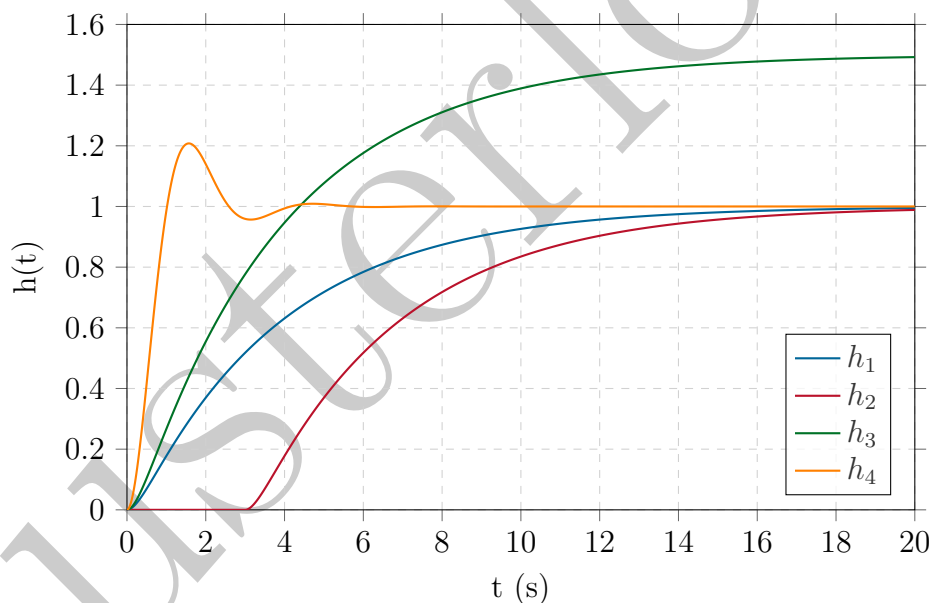


Abbildung 1: Sprungantworten.

c) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

3 P. |

$$G(s) = \frac{V}{1 + Ts},$$

welche mit dem Eingangssignal $u(t) = 2 \sin(t)$ angeregt wird. Über den Ausgang $y(t)$ des eingeschwungenen Systems sei bekannt

$$y(0) = a, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = b.$$

Bestimmen Sie damit V, T als explizite Formeln in Abhängigkeit von a, b .

Lösung:

a) i.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8/3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ii.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iii. Eine mögliche Wahl ist

$$\gamma(t) = e^{-2t}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- b)
- h_1 ist die richtige Sprungantwort.
 - h_2 weist eine Totzeit auf.
 - h_3 hat nicht den richtigen Endwert.
 - h_4 schwingt, was auf komplexwertige Pole hindeutet.

c)

$$T = -\frac{a}{b}, \quad V = \frac{a^2 + b^2}{2b}$$

3. Die Aufgaben a) und b) können unabhängig voneinander gelöst werden.

8 P. |

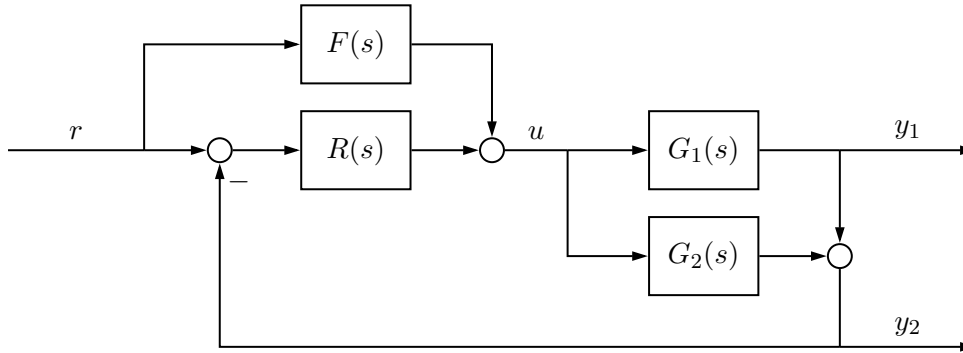


Abbildung 2: Blockdiagramm.

- a) Gegeben ist das Blockdiagramm eines Single-Input-Multi-Output (SIMO) Systems in Abbildung 2. Das Verhalten des geschlossenen Kreises wird beschrieben durch

5 P. |

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{r,y_1}(s) \\ T_{r,y_2}(s) \end{bmatrix} r, \quad (4)$$

wobei $T_{r,y_i}(s)$ die Übertragungsfunktion vom Referenzeingang $r(s)$ zum Ausgang $y_i(s)$, $i = 1, 2$, bezeichnet.

- Berechnen Sie die Elemente der Übertragungsmatrix $T_{r,y_1}(s)$ und $T_{r,y_2}(s)$ in Abhängigkeit von $F(s)$, $R(s)$, $G_1(s)$ und $G_2(s)$. 3 P. |
- Wenn das System von Abbildung 2 für $F(s) = 0$ instabil ist, ist es möglich, das System durch eine geeignete Wahl von $F(s)$ zu stabilisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P. |
- Nehmen Sie nun an, dass $F(s) = 0$, $G_2(s) = 0$ und 1 P. |

$$R(s) = \frac{20(s - 0.5)}{(s + 4)}, \quad G_1(s) = \frac{s + 4}{(2s - 1)(s + 3)}.$$

Überprüfen Sie die interne Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Begründen Sie Ihre Antwort!

- b) Nehmen Sie an, dass die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises gegeben ist durch

3 P. |

$$T(s) = \frac{KR(s)G(s)}{1 + KR(s)G(s)} \text{ mit } R(s) = \frac{1}{(s + 2)}, \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}.$$

- Verwenden Sie das Bode-Diagramm von $R(s)G(s)$ in Abbildung 3, um den maximalen Wert von K zu bestimmen, für den der geschlossene Regelkreis $T(s)$ BIBO-stabil ist. Geben Sie deutlich die Werte an, die Sie aus dem Bode-Diagramm ablesen, und wie Sie diese verwenden. 2 P. |
- Berechnen Sie für $K = 12$ den stationären Fehler ($e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$) des geschlossenen Regelkreises für eine Sprungänderung des Referenzwerts $r(t) = 2\sigma(t)$. 1 P. |

Lösung:

- a) i. Die Elemente der Übertragungsmatrix lauten

$$T_{r,y_1}(s) = \frac{G_1(s)(R(s) + F(s))}{1 + R(s)(G_1(s) + G_2(s))},$$
$$T_{r,y_2}(s) = \frac{(G_1(s) + G_2(s))(R(s) + F(s))}{1 + R(s)(G_1(s) + G_2(s))}.$$

- ii. Nein, es ist nicht möglich, das System durch die Wahl von $F(s)$ zu stabilisieren, da die Pole des geschlossenen Regelkreises durch den Nenner der Elemente der Übertragungsmatrix bestimmt werden, der unabhängig von $F(s)$ ist.
- iii. Für $F(s) = 0$, $G_2(s) = 0$, wird die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises zu

$$T(s) = \frac{R(s)G_1(s)}{1 + R(s)G_1(s)}$$

Da die Nullstelle in der rechten Halbebene in $R(s)$ und die Polstelle in $G_1(s)$ ($s = 0.5$) sich aufheben, ist der geschlossene Regelkreis nicht intern stabil, auch wenn die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises $T(s)$ BIBO-stabil ist ($T(s) = \frac{10}{s+13}$).

- b) i. Aus dem Bode-Diagramm ergibt sich, dass die Phasenkreuzfrequenz $\omega_{180} \approx 2.5 \text{ rad/s}$ beträgt und der Betrag der Übertragungsfunktion an dieser Frequenz $|RG(I\omega_{180})| = 0.05$ ist. Daher ist der maximale Wert von K , für den das geschlossene System BIBO-stabil ist, $K_{\max} = 1/0.05 = 20$.
- ii. Für $K = 12$ ergibt sich der stationäre Fehler für die Sprungänderung des Referenzwerts zu

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s} T(s) \right)$$
$$= \lim_{s \rightarrow 0} 2 \left(1 - \frac{12}{(s+2)(s^2+2s+2)+12} \right) = 2 \left(1 - \frac{12}{16} \right) = \frac{1}{2}$$

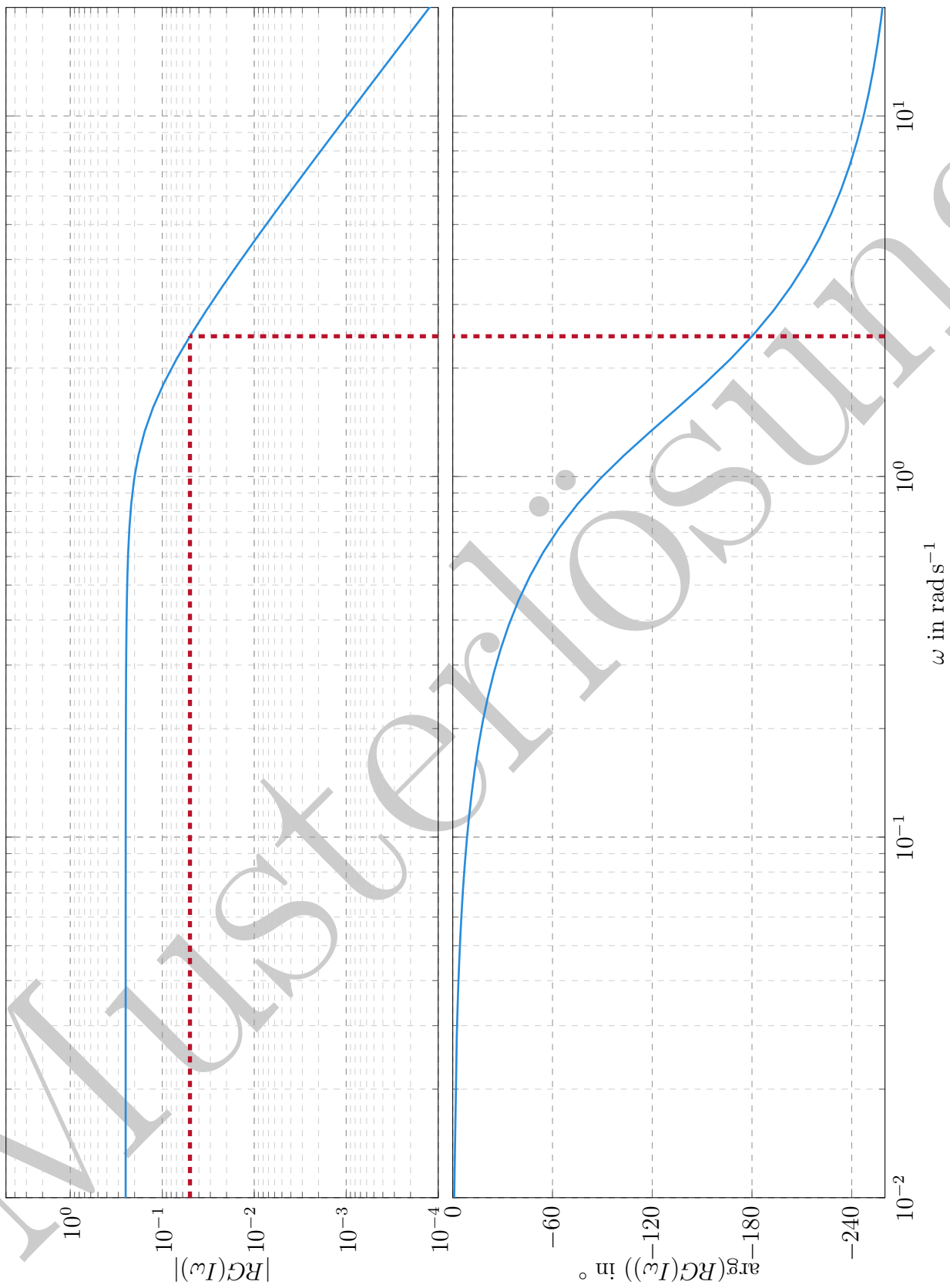


Abbildung 3: Bode-Diagramm für das System in Aufgabe 3.b).

4. Die Aufgaben a), b), und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

12 P. |

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

5 P. |

$$R^\#(q) = \frac{V(1 + qT)}{q}. \quad (5)$$

- i. Berechnen Sie daraus die Übertragungsfunktion $R(z)$ für $T_a = 2$ s. 1 P. |
- ii. Wie lautet die zugehörige Differenzengleichung von $R(z)$? Der Regelkreis ist in Abbildung 4 dargestellt. 1 P. |
- iii. Der Regler (5) soll für die Strecke

$$G^\#(q) = \frac{3 + q}{(1 + q)(3 + \sqrt{3}q)} \quad (6)$$

so entworfen werden, dass die Anstiegszeit $t_r = \frac{1.2}{\sqrt{3}}$ s und das Überschwingen $\ddot{u} = 25\%$ beträgt. Bestimmen Sie die Reglerparameter V und T . 3 P. |

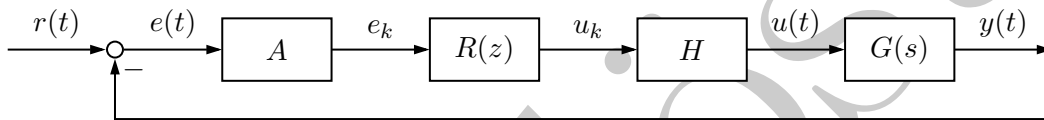


Abbildung 4: Regelkreis mit zeitkontinuierlicher Strecke und zeitdiskretem Regler. Das Abtastglied ist mit A und das Halteglied mit H gekennzeichnet.

b) Für die Übertragungsfunktion

3 P. |

$$G(s) = \frac{s + 3}{(s^2 - 2)(s - 4)} \quad (7)$$

wird ein PID-Regler

$$R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s \right) \quad (8)$$

mit $K_p = 15$, $T_I = 4$, $T_d = 2$ entworfen. In Abbildung 5 ist die zugehörige Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises zu sehen. Verwenden Sie das Nyquist-Kriterium, um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu untersuchen.

c) Gegeben ist die Differentialgleichung

4 P. |

$$\ddot{y} + \delta \dot{y} + \alpha y + \beta y^3 = u(t), \quad (9)$$

mit Eingang $u(t)$, Ausgang $y(t)$, und Konstanten $\alpha, \beta, \delta > 0$.

- i. Geben Sie (9) als System 1. Ordnung in Zustandsform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$, $y = g(\mathbf{x})$ an. 1 P. |
- ii. Bestimmen Sie alle Ruhelagen für $u_R = 0$. 1 P. |
- iii. Linearisieren Sie das System um jene Ruhelage, welche nicht von α, β, δ abhängt. Geben Sie die Zustandsraumdarstellung an. 2 P. |

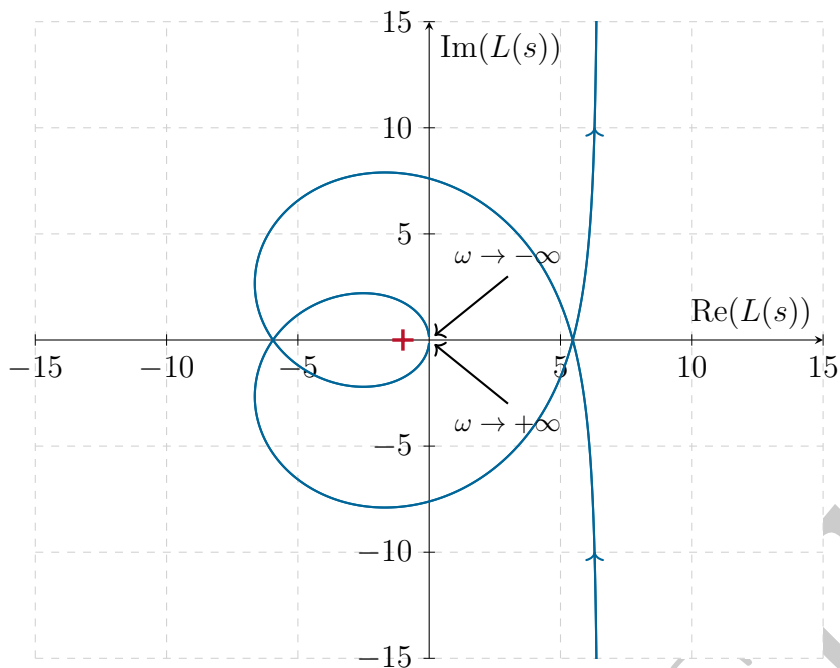


Abbildung 5: Nyquist-Ortskurve des offenen Regelkreises $L(s)$.

Lösung

a) i.

$$R(z) = VT + V \frac{z+1}{z-1}$$

ii.

$$u_{k+1} = u_k + V(1+T)e_{k+1} + V(1-T)e_k$$

iii.

$$T = \frac{1}{3}, \quad V = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$$

b) •

$$(\max\{\text{grad}(z_L), \text{grad}(n_L)\} - N_-(n_L) + N_+(n_L))\pi = 5\pi$$

- Stetige Winkeländerung aus dem Diagramm $= 5\pi$
- Daher ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil.

c) i.

$$\mathbf{x} := [y, \dot{y}]^T \implies \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ u - \delta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^3 \end{bmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) := x_1$$

ii.

$$\mathbf{x}_R \in \left\{ [0, 0]^T, \left[+\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0 \right]^T, \left[-\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0 \right]^T \right\}$$

iii.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = [0, 1]^T, \quad \mathbf{c}^T = [1, 0], \quad d = 0$$