

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VO Automatisierung
am 11.09.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	Σ
erreichbare Punkte	10	11	11	8	5	40 + (5)
erreichte Punkte						

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

10 P.

a) Gegeben ist das lineare zeitkontinuierliche System

3.5 P.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (1)$$

mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

i. Untersuchen Sie, ob das System (1) vollständig beobachtbar und erreichbar ist. **2 P.**

ii. Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des dualen Systems von (1) an! **1 P.**

iii. Ist das duale System vollständig erreichbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **0.5 P.**

b) Gegeben ist das lineare zeitkontinuierliche System

6.5 P.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2)$$

mit dem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Für dieses System sollen ein Beobachter und ein Zustandsregler entworfen werden. Die notwendigen Bedingungen für den Entwurf von Beobachter und Zustandsregler sind erfüllt.

i. Kann für das System (2) ein trivialer Beobachter entworfen werden? Begründen Sie Ihre Antwort. **1 P.**

ii. Entwerfen Sie einen Zustandsregler, sodass die Polstellen des geschlossenen Regelkreises bei -2 und -3 liegen. **3 P.**

iii. Diskutieren Sie, ob die Reihenfolge des Entwurfs von Beobachter und Zustandsregler eine Rolle spielt. Begründen Sie Ihre Antwort. **1 P.**

iv. Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Regelstruktur mit Beobachter und Zustandsregelung. **1.5 P.**

Lösung:

- a) i. Das System ist nicht beobachtbar, da $\text{Rank}(\mathcal{O}(\mathbf{c}, \mathbf{A})) = 1 \neq 3$. Das System ist erreichbar: $\text{Rank}(\mathcal{R}(\mathbf{A}, \mathbf{b})) = 3$.
ii.

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{b}_d u, y_d = \mathbf{c}_d \mathbf{x}_d$$

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_d = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_d = \mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- iii. Das primäre System ist nicht beobachtbar, daher ist das duale System nicht erreichbar.
b) Nein. Das System selbst ist nicht stabil und daher wird die Fehlerdynamik instabil sein.
c) $\mathbf{k}_C^\top = \begin{bmatrix} -12 & -4 \end{bmatrix}$
d) Aufgrund des Separationsprinzips spielt die Reihenfolge keine Rolle.
e) Siehe Skript, Abbildung 8.3

2. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

11 P. |

a) Gegeben ist das lineare zeitkontinuierliche System

3.5 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad (3a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (3b)$$

- i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems (3). 1 P. |
- ii. Ist $G(s)$ BIBO-stabil? Ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ realisierbar, phasenminimal und sprungfähig? Begründen Sie Ihre Antworten. 1.5 P. |
- iii. Untersuchen Sie, ob das System (3) für $u = 0$ asymptotisch stabil ist. Erklären Sie den Unterschied zwischen asymptotischer Stabilität und BIBO-Stabilität. 1 P. |

b) Berechnen Sie die Sprungantwort $h(t)$ der Übertragungsfunktion

2.5 P. |

$$G(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)}.$$

- c) Ein Wasserbehälter (siehe Abbildung 1) wird durch ein Stellventil versorgt. Der Versorgungsdruck ist nicht konstant, da mehrere Verbraucher dasselbe Wasserversorgungsnetz nutzen. Diese Druckschwankungen führen zu Änderungen des Zulaufstroms. Der Durchfluss der Wasserzufuhr (DM) sowie der Wasserstand im Behälter (FM) werden gemessen. Das Ziel ist es, den Wasserstand des Behälters mithilfe einer Kaskadenregelung konstant zu halten. 5 P. |

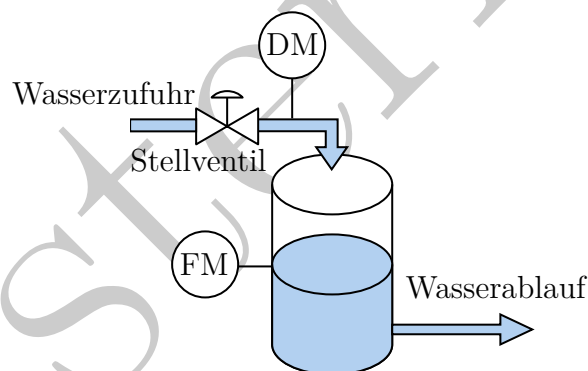


Abbildung 1: Wasserbehälter mit Stellventil, Durchflussmessung (DM) und Füllstandsmessung (FM)

- i. Welche Vorteile bietet eine Kaskadenregelung gegenüber einer einfachen Ausgangsregelung? 1 P. |
- ii. Identifizieren Sie: 3 P. |
 - die Regelgröße des äußeren Regelkreises,
 - die Regelgröße des inneren Regelkreises,
 - die Stellgröße.

Zeichnen Sie die entsprechende Kaskadenregelstruktur einschließlich des inneren und äußeren Regelkreises, der Messsignale und sämtlicher notwendigen Verbindungen.

- iii. Welche dynamischen Anforderungen sollte der innere Regelkreis im Vergleich zum äußeren Regelkreis erfüllen? 1 P. |

Lösung:

- a) i. $G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{2}{s+1}$
- ii. $G(s)$ ist BIBO-stabil, da sich der Pol in der linken Halbebene (LHP) befindet. $G(s)$ ist realisierbar, da $\text{grad}(z(s)) \leq \text{grad}(n(s))$ gilt. Es ist phasenminimal, da sich alle Pole und Nullstellen von $G(s)$ in der linken Halbebene (LHP) befinden. $G(s)$ ist nicht sprungfähig, da der Zählergrad < Nennergrad ist.
- iii. Das System ist nicht asymptotisch stabil, da nicht alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$) in der linken Halbebene (LHP) liegen. BIBO-Stabilität garantiert, dass jeder beschränkte Eingang eine beschränkte Ausgangsantwort erzeugt. Sie erfordert jedoch nicht, dass der Ausgang gegen einen stationären Wert konvergiert. Asymptotische Stabilität hingegen garantiert, dass der Systemzustand gegen den Gleichgewichtszustand konvergiert.
- b) $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s(s+2)(s+3)}\right) = 1 - 3\exp(-2t) + 2\exp(-3t)$
- c) i. Eine Kaskadenregelung bietet eine bessere Störunterdrückung als eine einstufige Regelung, da der innere Regelkreis auf eine Störung (Änderung des Versorgungsdrucks) reagiert, bevor diese die primäre Regelgröße (Wasserstand) wesentlich beeinflusst. Eine einstufige Regelung reagiert langsamer, da sie erst eingreift, nachdem sich der Wasserstand bereits verändert hat.
- ii. Primäre Regelgröße = Wasserstand, sekundäre Regelgröße = Wasserdurchfluss, Stellgröße = Ventilöffnung. DR = Durchflussregler, s = Wasserstandssollwert, FR = Füllstandsregler. Die Zeichnung muss zeigen, dass der Füllstandsregler (FR, äußerer Regelkreis) den Sollwert für den Durchflussregler (DR, innerer Regelkreis) vorgibt.

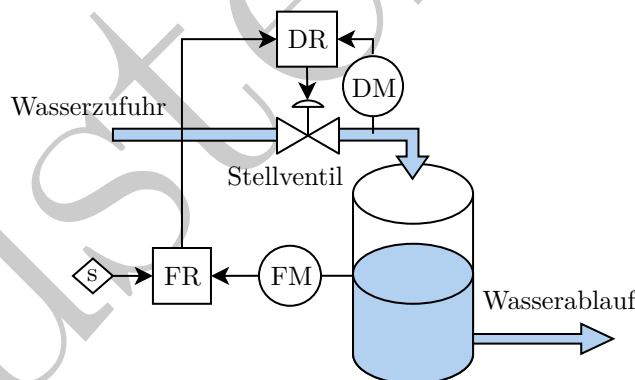


Abbildung 2: Wasserbehälter mit Stellventil, Durchflussmessung (DM), Füllstandsmessung (FM), Durchflussregler (DR), Füllstandsregler (FR) und Füllstandssollwert (s).

- iii. Der innerste Regelkreis wird so entworfen, dass er eine wesentlich größere Bandbreite (ca. 1 Dekade) als der äußere Regelkreis besitzt.

3. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

11 P. |

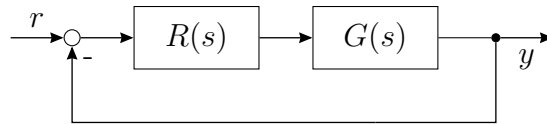


Abbildung 3: Regelkreis mit Regler und Strecke mit negativer Rückführung.

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines linearen Systems

3 P. |

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - \frac{s}{100} + 1},$$

sowie die Übertragungsfunktionen der Regler

$$R_1(s) = V, \quad R_2(s) = \frac{V \left(s^2 - \frac{s}{100} + 1 \right)}{s(sT + 1)},$$

$$R_3(s) = V \frac{1 + sT_1}{1 + s\eta_1 T_1} \frac{1 + sT_2}{1 + s\eta_2 T_2}, \quad R_4(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(1 + sT_R)},$$

wobei alle Parameter positiv sind und zusätzlich gilt $\eta_1 < 1$ sowie $\eta_2 > 1$. Regler und Strecke werden entsprechend Abbildung 3 zusammengeschaltet.

- i. Bezeichnen Sie, um welche Art von Regler es sich bei den Reglern $R_1(s)$, $R_2(s)$, $R_3(s)$ und $R_4(s)$ handelt! 2 P. |
 - ii. Kann mit dem Regler $R_2(s)$ ein stabiler geschlossener Kreis erreicht werden? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P. |
- b) Von einem linearen, zeitinvarianten System ist das Bode-Diagramm in Abbildung 5 bekannt. Das System soll mit einem Regler der Form 4 P. |

$$R(s) = \frac{V(1 + sT)}{s}$$

geregelt werden. Der geschlossene Kreis soll eine Anstiegszeit $t_r = 3 \text{ s}$ und Überspringen $\ddot{u} = 10 \%$ aufweisen. Bestimmen Sie die Parameter V und T des Reglers $R(s)$ so, dass diese Anforderungen erfüllt werden!

- c) Berechnen Sie die Ausgangsfolge (y_k) im eingeschwungenen Zustand für das in Abbildung 4 dargestellte Blockschaltbild mit der Abtastzeit $T_a = \frac{1}{2}$, Übertragungsfunktion 4 P. |

$$G(s) = \frac{s}{s + 2 \ln(2)}$$

und

$$(r_k) = 2 \sin(kT_a + \frac{\pi}{2}) e^{-2kT_a} + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3} kT_a + \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

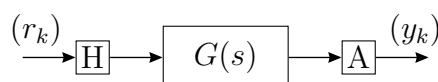


Abbildung 4: Blockschaltbild mit Abtaster (A) und Halteglied (H).

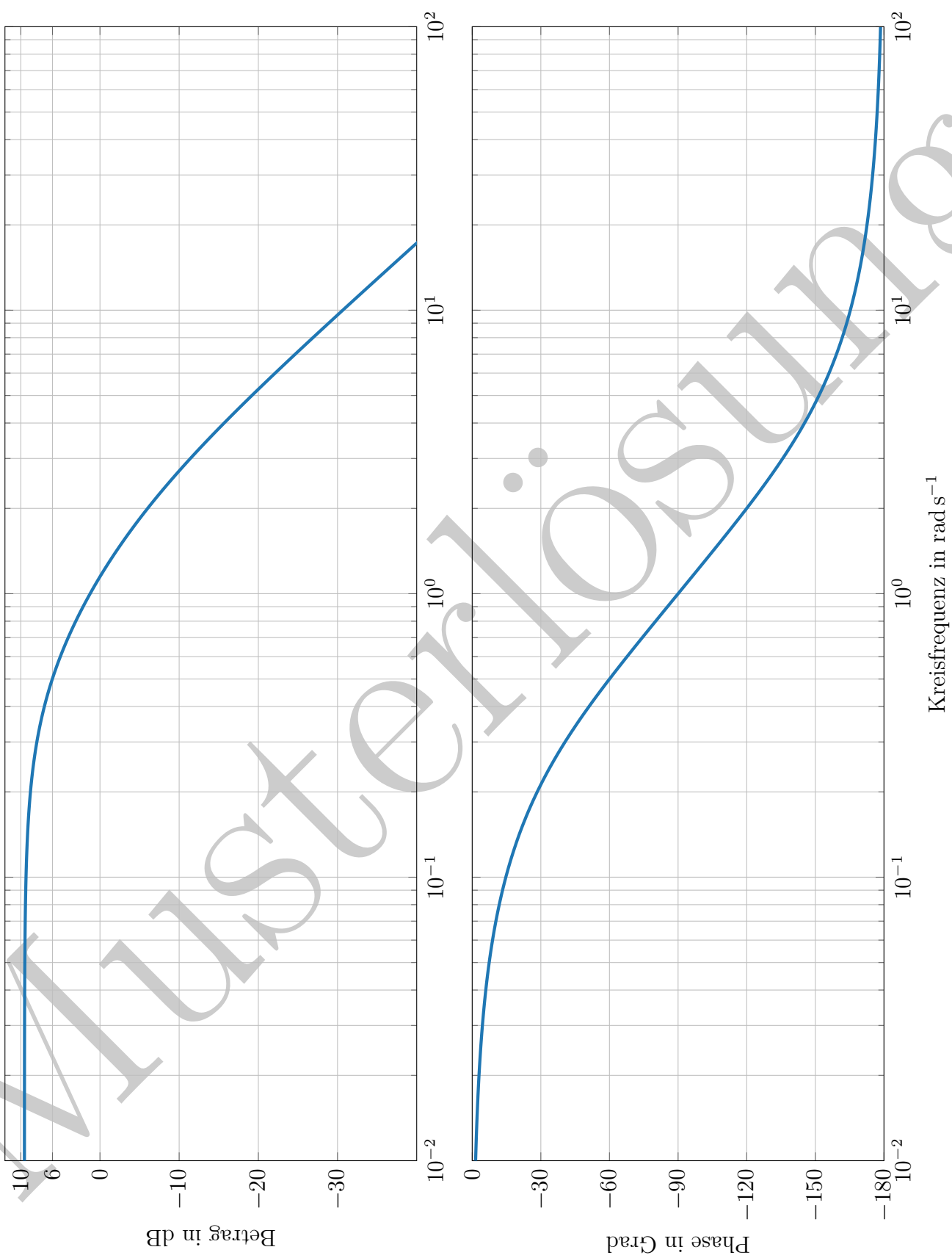


Abbildung 5: Bode-Diagramm zu Aufgabe 3b

Lösung:

- a) i. R_1 - P-Regler, R_3 - Lead-Lag-Regler, R_4 - PID-Regler (ohne Realisierungsterm)
(R_2 - "Kompensationsregler" aber mit RHP Nullstelle)
- ii. R_2 hat eine Kürzung einer instabilen Polstelle und ist damit nicht intern stabil.
- b) Durch die Vorgaben gilt $\omega_c = 0.5 \text{ rad}$ und $\Phi = 60^\circ$. Die Parameter sind $T_I = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $V_I = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Die dazu benötigten Größen der Strecke (Betrag und Phase von $G(s)|_{s=j\omega_c}$) können aus dem Bode-Diagramm abgelesen werden.
- c)

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s+2\ln(2)} \right\}$$
$$= \frac{z-1}{z} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{3}, z_1 = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$|G(z_1)| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\arg(G(z_1)) = \text{atan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$(y_k) = 3 \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} k + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$$

4. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

8 P. |

a) Gegeben sind die nichtlinearen Modellgleichungen

6 P. |

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= -c(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - d\dot{\varphi}_1 + u \\ \ddot{\varphi}_2 &= c(\varphi_1 - \varphi_2)^3 - gl \cos(\varphi_2) - d\dot{\varphi}_2 \\ y &= l \cos(\varphi_2)\end{aligned}$$

mit den positiven, konstanten Parametern c, d, g, l , dem Eingang des Systems u und dem Ausgang y .

- i. Geben Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und die Zustandsdarstellung in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ und $y = h(\mathbf{x}, u)$ an. 1 P. |
- ii. Berechnen Sie die Ruhelagen des Systems für $u_R = 0$. 1.5 P. |
- iii. Linearisieren Sie das System um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, u_R)$ und geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems inklusive aller Matrizen des Systems an. 2.5 P. |
- iv. Wählen Sie eine der zuvor berechneten Ruhelagen für $u_R = 0$ aus und geben Sie das linearisierte System um diese Ruhelage an. Ist die Ruhelage $\Delta\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ dieses Systems für $\Delta u = 0$ asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 1 P. |

b) Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes autonomes System

2 P. |

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Welche Fälle können bezüglich der Anzahl der Ruhelagen des Systems auftreten? Geben Sie an, wann welcher Fall eintritt. Geben Sie für jeden Fall ein System 2. Ordnung als Beispiel an.

Lösung:

a) i. z.B. (Reihenfolge ist anders möglich)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -c(x_1 - x_3)^3 - dx_2 + u \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3)^3 - dx_4 - gl \cos(x_3) \end{bmatrix}, h(\mathbf{x}, u) = l \cos(x_3)$$

ii. Die Ruhelagen sind

$$x_2 = 0, x_4 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

iii. Das linearisierte System ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3c(x_{1,R} - x_{3,R})^2 & -d & 3c(x_{1,R} - x_{3,R})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3c(x_{1,R} - x_{3,R})^2 & 0 & -3c(x_{1,R} - x_{3,R})^2 + gl \sin(x_{3,R}) & -d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad \mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ -l \sin(x_{3,R}) \ 0] \quad d = 0$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u$$

$$\Delta \mathbf{x}(t_0) = \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x}$$

iv. Setzt man eine Ruhelage ein erhält man

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & gl & -d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad \mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ -l \ 0]$$

Die Ruhelage ist nicht asymptotisch stabil, da die Matrix $\mathbf{A}$ singulär ist.

b) • 1. Fall: Eine einzige Ruhelage bei $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$, wenn $\mathbf{A}$ regulär ist.

$$\text{z.B. } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• 2. Fall: Unendlich viele Ruhelagen, wenn $\mathbf{A}$ singulär ist.

$$\text{z.B. } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$