6. Übung: Zustandsregler- und beobachter

Aufgabe 6.1. Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6.1a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{6.1b}$$

Weisen Sie die vollständige Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems mit Hilfe des **PBH-Eigenvektortests** nach. Bestätigen Sie das Ergebnis durch die Analyse der entsprechenden **Hankelmatrix**.

Aufgabe 6.2. Gegeben sind die linearen zeitinvarianten Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6.2a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{6.2b}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6.3a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{6.3b}$$

Testen Sie diese Systeme auf vollständige Erreichbarkeit bzw. vollständige Beobachtbarkeit. Verwenden Sie dazu die **Erreichbarkeits-** bzw. **Beobachtbarkeitsmatrix**. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Ordnung der zugehörigen Übertragungsfunktionen treffen? Berechnen Sie zur Kontrolle die zugehörigen Übertragungsfunktionen.

Aufgabe 6.3. Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{1}{2} & 8 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & 6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k. \tag{6.4}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Erreichbarkeitsmatrix, dass das System nicht vollständig erreichbar ist. Geben Sie eine Parametrierung des **erreichbaren** Unterraums $\mathcal{V}_r$ und des darauf orthogonal stehenden **nicht erreichbaren** Unterraums $\mathcal{V}_{nr}$ in der Form

$$\mathcal{V}_r = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \right\}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^4 \tag{6.5a}$$

$$\mathcal{V}_{nr} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \mathbf{x} = \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 \right\}, \quad \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}, \, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4 \tag{6.5b}$$

an. Berechnen Sie schließlich eine Steuerfolge (u_k), $k = 0, 1$, welche das System ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} = [x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{0,4}]$ innerhalb von 2 Abtastschritten in den Ursprung $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ überführt. Welche Aussage können Sie damit über die vollständige Steuerbarkeit des Systems treffen?

Aufgabe 6.4. Gegeben ist das lineare zeitkontinuierliche System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6.6a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{6.6b}$$

Entwerfen Sie für dieses System einen Zustandsregler der Form $u = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + g r$ so, dass die Eigenwerte des geschlossen Kreises bei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -3$ liegen. Ermitteln sie weiterhin den Vorfaktor g in der Form, dass für sprungförmige Führungsgrößen r stationäre Genauigkeit (d. h. $\lim_{t \to \infty} (y - r) = 0$) erreicht wird.

Aufgabe 6.5. Gegeben ist das zeitdiskrete, lineare zeitinvariante System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \tag{6.7a}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{6.7b}$$

Entwerfen Sie für dieses System einen Zustandsregler der Form $u_k = \mathbf{k}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k + g r_k$ so, dass alle Eigenwerte des geschlossen Kreises bei $\lambda_i = \frac{1}{2}, i \in \{1, 2, 3\}$ liegen. Ermitteln sie weiterhin den Vorfaktor g so, dass für sprungförmige Führungsgrößen $r_k = (1)^k$

stationäre Genauigkeit (d. h. $\lim_{k\to\infty}(y_k - r_k) = 0$) erreicht wird.

Berechnen Sie außerdem den Rückführungsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ eines vollständigen Luenberger-Beobachters, wobei alle Eigenwerte der Beobachtungsfehlerdynamik bei $\hat{\lambda}_i = \frac{1}{3}$ liegen sollen und geben Sie das Beobachtersystem an.