

# 1 Systemanalyse mit Maple

Ziel dieser Übung ist es, das Computeralgebraprogramm MAPLE für die Systemanalyse einzusetzen. Alle Aufgabenstellungen dieser Übungseinheit sind mit diesem Softwarepaket zu lösen.

Studieren Sie als Vorbereitung auf die Übung zumindest folgende Skripten:

- Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2020/21) [1]
  - Kapitel 1, vollständig
  - Kapitel 2, vollständig
  - Kapitel 3, Abschnitt 3.1 bis inkl. 3.4
- Skriptum zur VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik (WS 2020/21) [2]
  - Kapitel 2, vollständig
- Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2020) [3]
  - Kapitel 4, vollständig
  - Kapitel 5, vollständig



Alle MAPLE Dateien, die zum Bearbeiten dieser Übung benötigt werden, finden Sie in `uebung1.zip` auf der Homepage der Lehrveranstaltung.



Bei Fragen oder Anregungen zu dieser Übung wenden Sie sich bitte an

- Johannes Steinbach <[steinbach@acin.tuwien.ac.at](mailto:steinbach@acin.tuwien.ac.at)>
- Julian Landauer <[landauer@acin.tuwien.ac.at](mailto:landauer@acin.tuwien.ac.at)>.

Im Rahmen der VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik wird MAPLE ausschließlich im *Worksheet Mode* und *nicht* im *Document Mode* verwendet, wobei für Eingabezellen das *Text-Format* (*Maple Notation*) und nicht *Math-Format* (*2D-Math Notation*) zu verwenden ist. Eine neue Arbeitsblatt-Datei im *Worksheet Mode* erhält man unter *File/New/Worksheet Mode*. Damit MAPLE automatisch im richtigen Modus startet, kann unter *Tools/Options.../Display* im Feld *Input display* der Wert *Maple Notation* sowie unter *Tools/Options.../Interface* im Feld *Default format for new worksheets* der Wert *Worksheet* ausgewählt werden.

Im Computerlabor des Institutes steht MAPLE in der Version 2020.2 zur Verfügung.

## 1.1 Grundlegende Befehle von Maple

Nachfolgend sind grundlegende Befehle von MAPLE beschrieben. Sollten Sie mit MAPLE bereits vertraut sein, können Sie gleich bei Abschnitt 1.2 fortsetzen. Neben der Programmhilfe von MAPLE sind weiterführende Dokumentationen z. B. in den Referenzen [4–8] zu finden.

*Aufgabe 1.1.* Machen Sie sich mit MAPLE vertraut.



MAPLE-Arbeitsblatt-Dateien besitzen die Endung \*.mw. Öffnen Sie die heruntergeladene Datei `start_here.mw` mit MAPLE und arbeiten Sie beginnend bei der Eingabezelle `restart`; alle Befehle schrittweise durch. Zum Ausführen eines Befehls ist der Cursor in die jeweilige Eingabezelle zu stellen und die Eingabe-Taste zu drücken. Versuchen Sie alle Befehle zu verstehen und machen Sie gegebenenfalls von der Hilfefunktion und den oben genannten Referenzen Gebrauch. Am Ende der MAPLE-Datei finden Sie hilfreiche Definitionen und Hilfsfunktionen zum Lösen der nachfolgenden Aufgaben.



## 1.2 Einfache Rechnungen mit Maple

*Aufgabe 1.2.*

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Befehls `solve()`. Analysieren Sie, ob und wieviele Lösungen existieren.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\3x_1 + 2x_2 &= -3\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}-x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 1 \\2x_1 + 13x_2 - 3x_3 &= 2 \\3x_2 - x_3 &= -4\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}-x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 2 \\2x_1 + 13x_2 - 3x_3 &= 1 \\3x_2 - x_3 &= 3\end{aligned}\tag{1.3}$$

2. Stellen Sie die linearen Gleichungssysteme in Matrixform dar und bestimmen Sie die jeweiligen Lösungsvektoren  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  unter Zuhilfenahme des Packages `LinearAlgebra`.

**Aufgabe 1.3.** Tabelle 1.1 zeigt bekannte Resultate der  $z$ -Transformation.

1. Zeigen Sie die Gültigkeit der in Tabelle 1.1 angegebenen Korrespondenzen durch Auswertung der jeweiligen Laurent-Reihe. Sie können dazu den Befehl `sum()` (ggfs. mit Optionen oder Annahmen) verwenden.
2. Führen Sie die Rechnung erneut mit Hilfe des Befehls `ztrans()` durch.






Abtastfolgen		$z$ -Bildbereich
$(f_k)$		$f_z(z)$
$(1)$		$\frac{z}{z-1}$
$(kT_a)$		$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$(e^{akT_a})$		$\frac{z}{z-e^{aT_a}}$
$(kT_a e^{akT_a})$		$\frac{T_a z e^{aT_a}}{(z-e^{aT_a})^2}$

Tabelle 1.1: Einige Korrespondenzen der  $z$ -Transformation.

## 1.3 Ein mechanisches System

Es wird der in Abbildung 1.1 skizzierte translatorische Zweimassenschwinger betrachtet. Die beiden Starrkörper  $m_1$  und  $m_2$  gleiten in  $x_0$ -Richtung reibungsfrei auf einer Unterlage. Ihre Position wird mit den Koordinaten (Freiheitsgraden)  $s_1$  und  $s_2$  bezeichnet. Die Geschwindigkeiten werden mit  $w_1 = \dot{s}_1$  und  $w_2 = \dot{s}_2$  benannt. Der Stelleingang  $u$  des Systems ist die Kraft  $f_1$  und die Störung  $d$  entspricht der Kraft  $f_2$ . Als Ausgang  $y$  wird die Differenz  $s_2 - s_1$  gewählt.

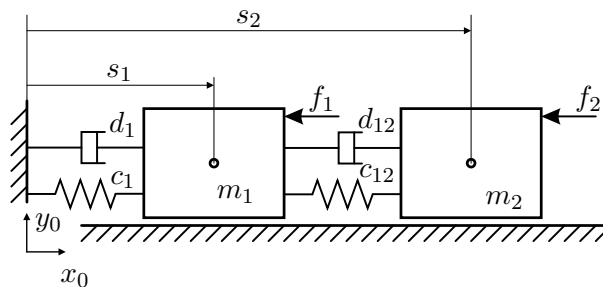


Abbildung 1.1: Translatorischer Zweimassenschwinger.

Die beiden Federn sind *nichtlinear*. Sie besitzen im entspannten Zustand die Längen

$s_{10} \neq 0$  und  $s_{120} \neq 0$  und setzen einer Längenänderung die Federkräfte

$$f_{c_1}(s_1) = c_1 \sinh\left(\frac{s_1}{s_{10}} - 1\right) \quad (1.4a)$$

$$f_{c_{12}}(s_2 - s_1) = c_{12} \sinh\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1\right) \quad (1.4b)$$

entgegen. Die beiden Dämpfer sind viskos, d. h. sie erzeugen eine geschwindigkeitsproportionale Kraft und haben die Dämpfungskoeffizienten  $d_1$  und  $d_{12}$ .

### 1.3.1 Lagrange-Formalismus

Im Folgenden wird zur Herleitung der Bewegungsgleichungen der *Lagrange-Formalismus* verwendet. Als generalisierte Koordinaten werden die Freiheitsgrade  $\mathbf{q} = [s_1 \quad s_2]^T$  festgelegt. Die kinetische Energie des Systems ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2. \quad (1.5)$$

Für die in einer Feder mit der Länge  $s$  und der entspannten Länge  $s_0$  gespeicherte Energie gilt

$$V_c(s) = \int_{s_0}^s f_c(\xi) d\xi, \quad (1.6)$$

woraus die potentielle Energie

$$V = c_1 s_{10} \left( \cosh\left(\frac{s_1}{s_{10}} - 1\right) - 1 \right) + c_{12} s_{120} \left( \cosh\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1\right) - 1 \right) \quad (1.7)$$

des Systems folgt. Die dissipativen Kräfte der Dämpfer ergeben sich zu

$$\mathbf{f}_D = \begin{bmatrix} -d_1 w_1 + d_{12}(w_2 - w_1) \\ -d_{12}(w_2 - w_1) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

berücksichtigt. Ferner lautet der Vektor der verallgemeinerten (äußeren) Kräfte

$$\mathbf{f}_q = -[f_1 \quad f_2]^T + \mathbf{f}_D.$$

Mit Hilfe der Lagrange-Funktion  $L = T - V$  erhält man aus dem Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} L = \mathbf{f}_q^T \quad (1.9)$$

die Bewegungsgleichungen des Systems. Diese können als System von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, d) \quad (1.10a)$$

$$y = g(\mathbf{x}, u, d) \quad (1.10b)$$

dargestellt werden. Im vorliegenden Fall gilt mit  $\mathbf{x} = [s_1 \ w_1 \ s_2 \ w_2]^T$ ,  $u = f_1$  und  $d = f_2$

$$\frac{d}{dt}s_1 = w_1 \quad (1.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w_1 = \frac{1}{m_1} \left( -c_1 \sinh\left(\frac{s_1}{s_{10}} - 1\right) - d_1 w_1 + c_{12} \sinh\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1\right) \right. \\ \left. + d_{12}(w_2 - w_1) - f_1 \right) \end{aligned} \quad (1.11b)$$

$$\frac{d}{dt}s_2 = w_2 \quad (1.11c)$$

$$\frac{d}{dt}w_2 = \frac{1}{m_2} \left( -c_{12} \sinh\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{120}} - 1\right) - d_{12}(w_2 - w_1) - f_2 \right) \quad (1.11d)$$

sowie

$$y = s_2 - s_1 . \quad (1.11e)$$

### 1.3.2 Bestimmung der Ruhelage

Nehmen der Stelleingang und die Störung den stationären Wert  $u_R = f_{1R}$  und  $d_R = f_{2R}$  an, so folgt für die Ruhelage des Systems aus  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R, d_R) = \mathbf{0}$  mit (1.11)

$$s_{1R} = s_{10} \left( 1 - \operatorname{asinh}\left(\frac{f_{1R} + f_{2R}}{c_1}\right) \right) \quad (1.12a)$$

$$w_{1R} = 0 \quad (1.12b)$$

$$s_{2R} = s_{10} \left( 1 - \operatorname{asinh}\left(\frac{f_{1R} + f_{2R}}{c_1}\right) \right) + s_{120} \left( 1 - \operatorname{asinh}\left(\frac{f_{2R}}{c_{12}}\right) \right) \quad (1.12c)$$

$$w_{2R} = 0 . \quad (1.12d)$$

Es existiert also genau eine Ruhelage, in welcher für den Ausgang

$$y_R = s_{120} \left( 1 - \operatorname{asinh}\left(\frac{f_{2R}}{c_{12}}\right) \right) \quad (1.12e)$$

gilt.

### 1.3.3 Linearisierung

Linearisiert man das System (1.11) gemäß Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2020/21) [1] Satz 2.6 um die Ruhelage (1.12), so erhält man mit den neuen Koordinaten  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$ , dem Stelleingang  $\Delta u = u - u_R$ , der Störung  $\Delta d = d - d_R$  und dem Ausgang  $\Delta y = y - y_R$  das lineare System

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}_u\Delta u + \mathbf{b}_d\Delta d \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d_u\Delta u + d_d\Delta d \end{aligned} \quad (1.13a)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{(f_{1R} + f_{2R})^2 + c_1^2}}{m_1 s_{10}} & \frac{\sqrt{f_{2R}^2 + c_{12}^2}}{m_1 s_{120}} & -\frac{d_1 + d_{12}}{m_1} & \frac{\sqrt{f_{2R}^2 + c_{12}^2}}{m_1 s_{120}} & \frac{d_{12}}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{f_{2R}^2 + c_{12}^2}}{m_2 s_{120}} & \frac{d_{12}}{m_2} & -\frac{\sqrt{f_{2R}^2 + c_{12}^2}}{m_2 s_{120}} & -\frac{d_{12}}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}, \quad (1.13b)$$

$$\mathbf{c}^T = [-1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad d_u = 0 \quad \text{und} \quad d_d = 0.$$

**Aufgabe 1.4.** Obige Rechnungen können mit Unterstützung von MAPLE durchgeführt werden.



Arbeiten Sie das auf der Homepage der Lehrveranstaltung bereitgestellte MAPLE-Arbeitsblatt `aufgabe_1_4.mw` durch.



## 1.4 Rotary Flexible Joint

Der in Abbildung 1.2 dargestellte Laborversuch *Rotary Flexible Joint* besteht aus einem Sockel und einem Träger, der zu dem Sockel drehbar gelagert ist und mit einem Synchronmotor angetrieben wird. Der Ausleger ist wiederum drehbar gegenüber dem Träger gelagert und ist mit Hilfe zweier Federn elastisch mit dem Träger verbunden. Der vorliegende Versuchsaufbau kann als einfaches Modell eines elastischen Gelenks eines Roboters betrachtet werden.

In Abbildung 1.3 ist das mechanische Ersatzschaltbild des Rotary Flexible Joints dargestellt. Der Synchronmotor treibt den Träger (Drehwinkel  $\varphi_t$ , Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_t = \omega_t$ ) direkt an. Der Rotor des Motors und der Träger sind starr miteinander verbunden und können deshalb durch ein gemeinsames Trägheitsmoment  $I_{t,zz}$  beschrieben werden. Es tritt ebenfalls eine viskose Reibung (proportional zur Drehwinkelgeschwindigkeit) mit dem Reibungskoeffizienten  $d_t$  sowie eine Coulomb'sche Reibung mit dem Reibungskoeffizienten  $d_{t,c}$  zwischen Stator und Rotor auf. Der Ausleger ist drehbar gegenüber dem Träger gelagert (Drehwinkel absolut  $\varphi_a$ , Drehwinkelgeschwindigkeit absolut  $\dot{\varphi}_a = \omega_a$ , siehe Abbildung 1.4), wobei die Kopplung über zwei lineare Federn (Steifigkeit  $c_f$ ) erfolgt. Aufgrund der speziellen Anordnung der Federn ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang der Form  $\tau_{c,at}(\varphi_a, \varphi_t)$  für das von den Federn eingebrachte Moment. Weiterhin wird angenommen, dass in der Lagerung des Auslegers eine viskose Reibung mit dem Reibungskoeffizienten  $d_a$

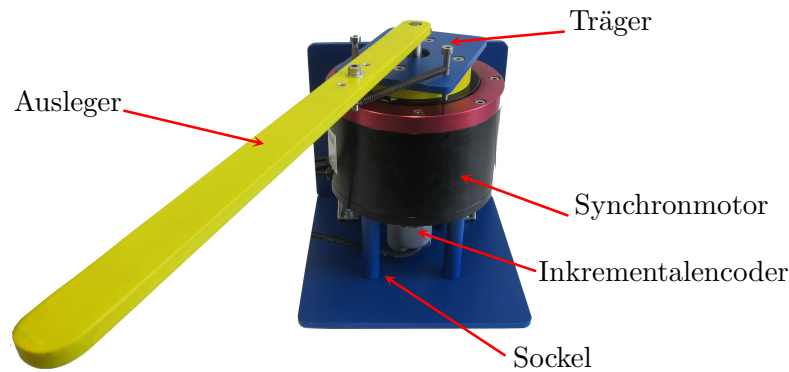


Abbildung 1.2: Der Laborversuch Rotary Flexible Joint.

auftritt, welche proportional zur absoluten Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_a = \omega_a$  ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Reibung im zur Messung des Winkels  $\varphi_a$  eingesetzten Inkrementalencoder, siehe Abb. 1.2, gegenüber der Reibung im Lager zwischen Träger und Ausleger dominiert.

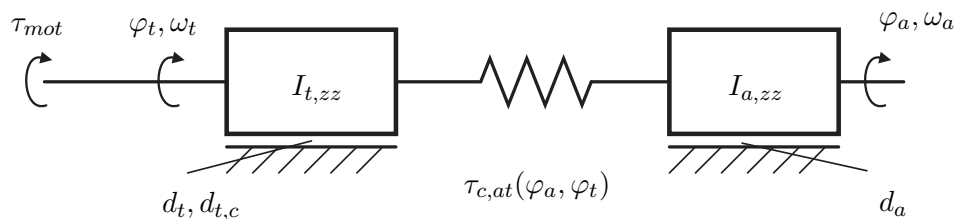


Abbildung 1.3: Mechanisches Ersatzschaltbild des Laborversuchs Rotary Flexible Joint.

Zur genauen Beschreibung der Kinematik des Systems sowie der geometrischen Anordnung der Federn ist in Abbildung 1.4 eine Detailansicht des Trägers und des Auslegers dargestellt. Der Träger und der Ausleger rotieren um einen gemeinsamen Drehpunkt (Nullpunkt des Inertialkoordinatensystems  $(0_0x_0y_0z_0)$ , des körperfesten Koordinatensystems  $(0_tx_t y_t z_t)$  des Trägers sowie des körperfesten Koordinatensystems  $(0_ax_a y_a z_a)$  des Auslegers). Der Schwerpunkt des Trägers liegt dabei im Drehpunkt, der Schwerpunkt  $SP_a$  des Auslegers ist gegenüber dem Drehpunkt verschoben.

Wie in Abbildung 1.4 dargestellt, dienen zwei (lineare) Federn der Steifigkeit  $c_f$  zur elastischen Kopplung des Auslegers mit dem Träger. Diese sind zwischen den Montagepunkten  $MP_{1t}$  bzw.  $MP_{2t}$  am Träger und dem Montagepunkt  $MP_a$  am Ausleger befestigt. Die Lage der Montagepunkte ist der Abbildung 1.4 zu entnehmen, wobei die Annahme getroffen wird, dass  $MP_{2t}$  und  $MP_{1t}$  symmetrisch zur  $y$ -Achse  $y_t$  des Trägers positioniert sind.

**Aufgabe 1.5.** Beschreiben Sie die Kinematik des Systems in MAPLE.

1. Stellen Sie dazu die Drehmatrizen für die Teilsysteme Träger und Ausleger auf.
2. Beschreiben Sie die Lage der Montagepunkte  $MP_{1t}$ ,  $MP_{2t}$  im körperfesten

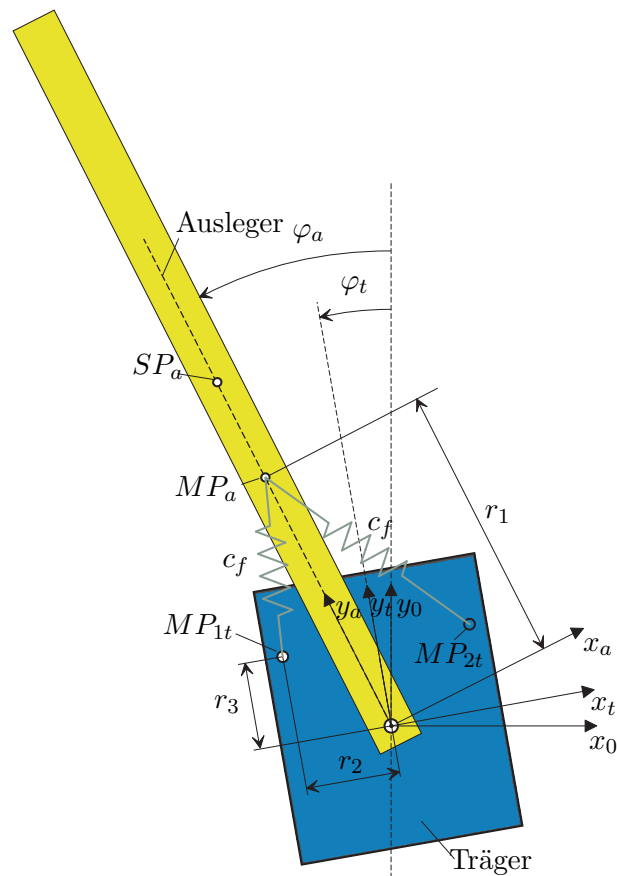


Abbildung 1.4: Detailansicht der Geometrie des Trägers und des Auslegers.

Koordinatensystem des Trägers sowie die Lage des Montagepunktes  $MP_a$  und des Schwerpunktes  $SP_a$  des Auslegers (vgl. Aufgabe 1.6) im körperfesten Koordinatensystem des Auslegers. Beschreiben Sie anschließend die Lage dieser Punkte im Inertialkoordinatensystem.

- Geben Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $SP_a$  sowie die Drehwinkelschwindigkeiten der zwei Teilsysteme Träger und Ausleger mit Hilfe der Manipulator-Jacobi-Matrizen an.

Verwenden Sie dazu die Freiheitsgrade  $\mathbf{q} = [\varphi_a, \varphi_t]^T$  bzw. deren zeitliche Ableitung  $\dot{\mathbf{q}} = [\omega_a, \omega_t]^T$ .

Zur Berechnung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange-Formalismus werden die kinetische und die potentielle Energie des Systems benötigt. Wie im Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2020) [3] dargestellt, lässt sich die kinetische Energie in der Form

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.14)$$

mit der symmetrischen positiv definiten Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  darstellen, wobei die Ein-



träge der Massenmatrix durch die Massen und die Trägheitsmomente der beteiligten Körper bestimmt werden. Der Schwerpunkt des Teilsystems aus Rotor und Träger liegt auf der Drehachse, weswegen hier nur das gesamte Trägheitsmoment des Motors und des Trägers um die Drehachse ( $z$ -Achse)  $I_{t,zz}$  einen Beitrag zur kinetischen Energie liefert. Im Gegensatz dazu ist der Schwerpunkt  $SP_a$  des Auslegers gegenüber der Drehachse verschoben, weswegen hier sowohl translatorische als auch rotatorische Anteile der kinetischen Energie auftreten. Abbildung 1.5 zeigt eine Detailansicht des Auslegers. Dieser stellt im Wesentlichen einen Quader der Länge  $l_a$ , der Breite  $b_a$ , der Höhe  $h_a$  sowie der Massendichte  $\rho_a$  dar.

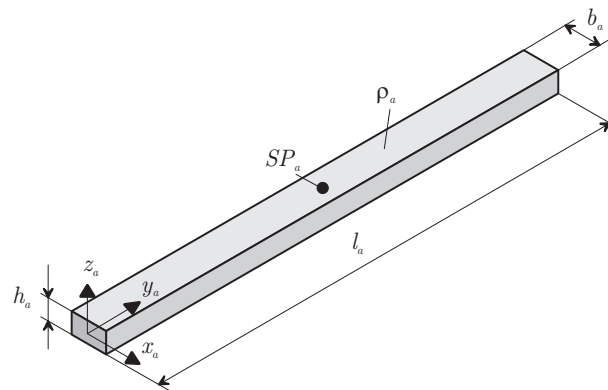


Abbildung 1.5: Detailansicht des Auslegers zur Bestimmung der Masse, des Schwerpunkts sowie der Trägheitsmatrix.

**Aufgabe 1.6.** Berechnen Sie in MAPLE die Masse  $m_a$ , die Lage des Schwerpunkts relativ zum Drehpunkt sowie die Trägheitsmatrix  $\mathbf{I}_a$  des Auslegers um den Schwerpunkt.

**Aufgabe 1.7.** Stellen Sie die Energie des Systems in MAPLE auf. Berechnen Sie dazu

- die Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  des Systems sowie
- die potentielle Energie der Federn

und stellen Sie die kinetische Energie in der Form (1.14) dar. Nehmen Sie dabei an, dass die Federn für  $l_f = l_{f0}$ , mit der Länge der Feder  $l_f$ , entspannt sind, d.h. es gilt für die Federkraft  $f_c(l_{f0}) = 0$ . Berechnen Sie weiters die Momente aufgrund der viskosen Reibungen zwischen Rotor und Stator sowie zwischen Ausleger und Inkrementalencoder. Beachten Sie, dass die viskosen Reibungen, wie bereits angeführt, jeweils proportional zu den Winkelgeschwindigkeiten bezüglich des Inertialkoordinatensystems  $(0_0x_0y_0z_0)$   $\omega_t$  bzw.  $\omega_a$  sind.

**Hinweis:** Die Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  des RFJ ist unabhängig von  $\mathbf{q}$  und besitzt Diagonalform.

Das mechanische System des Rotary Flexible Joint wird mit Hilfe eines Synchronmotors

angetrieben (siehe Abbildung 1.2), welcher das Eingangsmoment  $\tau_{mot}$  am Träger aufbringt. Der Anteil der Coulomb'schen Reibung am Motor wird ebenfalls in Form eines verallgemeinerten Moments berücksichtigt, welches durch das Reibmoment

$$\tau_c = -d_{t,c} \tanh\left(\frac{\omega_t}{\omega_{t,0}}\right) \quad (1.15)$$

angenähert wird, wobei  $\omega_{t,0}$  eine geeignet gewählte Referenzgeschwindigkeit darstellt. Im Weiteren soll angenommen werden, dass eine externe Störkraft  $f_s$  im Schwerpunkt des Auslegers angreift, welche in Richtung der (körperfesten)  $x_a$ -Achse orientiert ist.

**Aufgabe 1.8.** Berechnen Sie in MAPLE

- den Vektor der verallgemeinerten Kräfte und Momente  $\mathbf{f}_q$ ,
- den Vektor der Potentialkräfte  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  sowie
- die Einträge der Coriolismatrix  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  und überlegen Sie, warum alle Einträge von  $\mathbf{C}$  identisch 0 sind.

Stellen Sie anschließend die Bewegungsgleichungen des Systems in der Form

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}(-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_q) \quad (1.16)$$

dar. Geben Sie schließlich das mathematische Modell des Systems in der Form

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, d) \quad (1.17a)$$

$$y = h(\mathbf{x}) = \varphi_a, \quad (1.17b)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} = [\varphi_a, \omega_a, \varphi_t, \omega_t]^T$ , dem Eingang  $u = \tau_{mot}$  sowie der Störung  $d = f_s$ , an.

**Hinweis:** Um ihr Ergebnis für  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  leicht überprüfen zu können, rechnen Sie zunächst mit allgemeinen Federlängen  $l_f(\mathbf{q})$  (vgl. Aufgabe 1.7). Setzen Sie erst ganz zum Schluss für  $l_f(\mathbf{q})$  bzw.  $\frac{\partial l_f}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})$  ein.

## 1.5 Nichtlineares System

Gegeben sei das nichtlineare System von Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = -x - 2 \sin(x) + u \quad (1.18a)$$

$$\ddot{y} = -2 \sin(x) + x\dot{x}\dot{y} \quad (1.18b)$$

mit dem Eingang  $u$  und dem Ausgang

$$z = g(x, y) = \sin(y). \quad (1.19)$$

**Aufgabe 1.9.**

1. Führen Sie das System (1.18)-(1.19) in Zustandsraumdarstellung über.
2. Berechnen Sie die Ruhelagen von (1.18) für einen stationären Eingangswert  $u = u_R$ . Geben Sie eine beispielhafte Ruhelage für  $u_R \neq 0$  an und überprüfen Sie diese.

**Hinweis:** Nützen Sie die Option `allsolutions = true` des Befehls `solve()`, um alle Lösungen zu erhalten.

3. Linearisieren Sie das System bezüglich einer allgemeinen Ruhelage  $\mathbf{x}_R$ .
4. Bestimmen Sie für das linearisierte System die Übertragungsfunktion  $G(s) = \Delta z(s)/\Delta u(s)$ . Können Sie aus  $G(s)$  auf die asymptotische Stabilität des Systems schließen?
5. Berechnen Sie die Ruhelagen für  $u_R = 0$ .
6. Untersuchen Sie anhand des linearisierten Systems die Stabilität der unter 5 ermittelten Ruhelagen. Berechnen Sie dazu die Eigenwerte der Dynamikmatrix des linearisierten Systems.

## 1.6 Rotary Flexible Joint, Fortsetzung

**Aufgabe 1.10.** Für das System (1.17) ist eine analytische Berechnung der Ruhelagen nicht möglich. Jedoch können diese für  $\tau_{motR} = f_{sR} = 0$  durch Kräftegleichgewichtsüberlegungen am Ausleger bestimmt werden. Geben Sie für diesen Fall alle praktisch sinnvollen Ruhelagen des Systems an. Verwenden Sie nun die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = [0, 0, 0, 0]^T$  und linearisieren Sie das System um diese Ruhelage. Vernachlässigen Sie dabei den Coulomb'schen Reibanteil. Werten Sie die Eigenwerte der resultierenden Dynamikmatrix unter Zuhilfenahme von Tabelle 1.2 aus.

Am Laboraufbau des Rotary Flexible Joint wurde hohe Reibung in den Lagern des Synchronmotors beobachtet, welche hauptsächlich durch den nichtlinearen Coulomb'schen Reibungsanteil bedingt ist. Für die Anwendung eines linearen Reglers, wie er noch in Übung 2 besprochen wird, hat sich die folgende Vorgehensweise als zweckdienlich erwiesen. Da der Servovomrichter zur Ansteuerung des Synchronmotors über einen Drehzahlregler verfügt, kann ein kaskadierter Regelkreis aufgebaut werden, wobei der unterlagerte Regler zur Regelung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_t$  mit einer wesentlich größeren Bandbreite als der des mechanischen Systems entworfen wird.

**Aufgabe 1.11.** Überlegen Sie, welche Gleichung des Systems aus (1.17) durch Vorgabe der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_t$  als Eingangsgröße überflüssig wird, und reduzieren Sie das Modell aus Aufgabe 1.4 um diese. Für das reduzierte System gilt klarerweise die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = [0, 0, 0]^T$ , mit  $\omega_t = 0$  und  $f_{sR} = 0$ . Linearisieren Sie das reduzierte

Bezeichnung		Wert	Einheit
Länge des Auslegers	$l_a$	300	mm
Breite des Auslegers	$b_a$	20	mm
Höhe des Auslegers	$h_a$	5.7	mm
Massendichte des Auslegers	$\rho_a$	2700	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Gesamtes Trägheitsmoment des Trägers und des Rotors um $z$ -Achse	$I_{t,zz}$	$12.8 \cdot 10^{-4}$	$\text{kgm}^2$
Geometrieparameter der Montagepunkte	$r_1$	95	mm
Geometrieparameter der Montagepunkte	$r_2$	30	mm
Geometrieparameter der Montagepunkte	$r_3$	30	mm
Federsteifigkeit	$c_f$	221.24	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$
entspannte Länge der Feder	$l_{f0}$	34.7	mm
viskose Reibungskonstante Träger	$d_t$	$4.977 \cdot 10^{-2}$	Nms
viskose Reibungskonstante Ausleger	$d_a$	$6.42 \cdot 10^{-4}$	Nms
Coulomb'sche Reibungskonstante Träger	$d_{t,c}$	$1.43 \cdot 10^{-2}$	Nms
Referenzgeschwindigkeit für tanh-Näherung	$\omega_{t,0}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Tabelle 1.2: Parameter des Laborversuchs Rotary Flexible Joint.

System um diese Ruhelage und vernachlässigen Sie auch hierbei den Coulomb'schen Reibanteil. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G_{u,y} = \frac{y(s)}{u(s)}$  des reduzierten, linearisierten Systems vom Eingang  $u = \omega_t$  zum Ausgang  $y = \varphi_a$ .

**Hinweis:**

- Kontrollieren Sie, ob Ihre berechnete Übertragungsfunktion mit folgender übereinstimmt:

$$G_{u,y} = \frac{356.88}{s(s^2 + 0.23s + 356.88)}$$

- Führen Sie alle Berechnungen in MAPLE mit allgemeinen Parametern durch und setzen Sie die Parameter erst dann ein, wenn eine numerische Auswertung verlangt ist (z.B. bei der Berechnung der Eigenwerte).
- Verwenden Sie zur übersichtlicheren Darstellung der Ergebnisse den Ersatzparameter  $I_{a,zz}$  für das Trägheitsmoment des Auslegers um die  $z$ -Achse.

## 1.7 Literatur

- [1] A. Kugi, *Skriptum zur VU Automatisierung (WS 2020/2021)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020.
- [2] A. Kugi und W. Kemmetmüller, *Skriptum zur VU Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik (WS 2020/2021)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020.
- [3] W. Kemmetmüller und A. Kugi, *Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2020)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020.
- [4] C. Eberhart, *Problem Solving with Maple - A handbook for calculus students*, Department of Mathematics, University of Kentucky, 2003.
- [5] A. Heck, *Introduction to Maple*, 3. Aufl. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [6] M. Kofler, G. Bitsch und M. Komma, *Maple - Einführung, Anwendung, Referenz*, 5. Aufl. München: Addison-Wesley, 2000.
- [7] Maplesoft. (2011). „Maple User Manual,“ Adresse: [http://www.maplesoft.com/documentation\\_center/](http://www.maplesoft.com/documentation_center/).
- [8] L. Bernardin, P. Chin, P. DeMarco, K. Geddes, D. Hare, K. Heal und G. Labahn. (2011). „Maple Programming Guide,“ Maplesoft, Adresse: [http://www.maplesoft.com/documentation\\_center/](http://www.maplesoft.com/documentation_center/).