

2 Roboterkinematik

Die *Kinematik* beschäftigt sich ausschließlich geometrisch mit der Bewegung von Körpern unter Verwendung der Größen Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Dabei bleiben wirkende Kräfte sowie die Massen und Massenträgheiten der Körper unberücksichtigt – diese sind Teil der *Dynamik*.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Geometrie von Robotern mit serieller Kinematik und vertieft dabei die Begriffe Vorwärtskinematik und inverse Kinematik aus Kapitel 1. Zusätzlich werden auch die Geschwindigkeiten im Konfigurations- und Arbeitsraum mithilfe der differentiellen Kinematik betrachtet.

2.1 Vorwärtskinematik

In diesem Abschnitt wird die allgemeine Beziehung der Vorwärtskinematik (1.3) auf Roboter mit serieller Kinematik eingeschränkt. Dazu werden zunächst die wichtigsten Zusammenhänge zu *homogenen Transformationen*, welche in der Vorlesung *Modellbildung* [3.1] eingeführt wurden, zusammengefasst. Unter Verwendung von homogenen Transformationen wird danach ein Formalismus für die Vorwärtskinematik serieller Roboter hergeleitet. Weiters werden unterschiedliche Möglichkeiten für die Parametrierung der Orientierung im dreidimensionalen Raum diskutiert. Schließlich wird der eingeführte Formalismus auf einen klassischen 6-Achs-Industrieroboter angewendet.

Im Folgenden werden die kinematischen Strukturen von Robotern mit schematischen Gelenken und Verbindungslinien entsprechend Abbildung 2.1 dargestellt.

2.1.1 Homogene Transformationen

Die homogene Transformation \mathbf{H}_0^1 beschreibt die Lage des Koordinatensystems $(0_1x_1y_1z_1)$ in Bezug auf das Koordinatensystem $(0_0x_0y_0z_0)$ (ausgedrückt im Koordinatensystem 0)

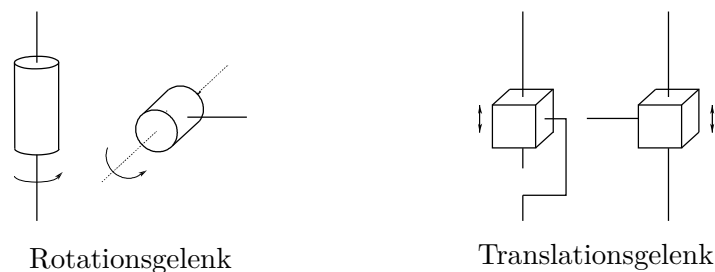


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung eines Rotations- und eines Translationsgelenkes [3.2].

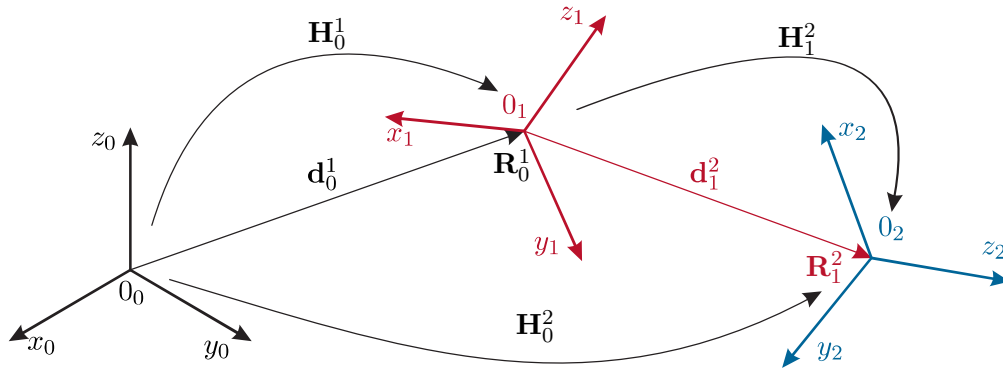


Abbildung 2.2: Homogene Transformationen am Beispiel der Koordinatensysteme $(0_0x_0y_0z_0)$, $(0_1x_1y_1z_1)$ und $(0_2x_2y_2z_2)$ [3.1].

und setzt sich aus der Position des Koordinatenursprungs $\mathbf{d}_0^1 \in \mathbb{R}^3$ und der orthogonalen Rotationsmatrix $\mathbf{R}_0^1 \in \text{SO}(3)$ gemäß

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3) \quad (2.1)$$

zusammen. In (2.1) bezeichnet $\mathbf{0}$ einen Nullvektor (oder eine Nullmatrix) der geeigneten Größe. Ein Koordinatensystem $(0_2x_2y_2z_2)$ wird bezüglich des Koordinatensystems $(0_0x_0y_0z_0)$ durch aufeinanderfolgende Transformationen mithilfe des Koordinatensystems $(0_1x_1y_1z_1)$ in der Form

$$\mathbf{H}_0^2 = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 \quad (2.2)$$

beschrieben, siehe Abbildung 2.2. Weiters wird die elementare Transformation $\mathbf{H}_{T_i,d}$ eingeführt, welche die Translation um die Distanz d entlang der lokalen Koordinatenachse $i \in \{x, y, z\}$ beschreibt. Eine Rotation um die lokale Achse $i \in \{x, y, z\}$ mit dem Winkel φ wird im Folgenden mit $\mathbf{H}_{R_i,\varphi}$ bezeichnet und die in $\mathbf{H}_{R_i,\varphi}$ enthaltene Rotationsmatrix wird als $\mathbf{R}_{i,\varphi}$ geschrieben.

2.1.2 Serielle kinematische Ketten

In Abbildung 2.3 ist schematisch eine allgemeine serielle kinematische Kette bestehend aus Rotations- und Translationsgelenken mit dem Inertialkoordinatensystem $(0_0x_0y_0z_0)$ und dem Koordinatensystem des Endeffektors $(0_ex_ey_ez_e)$ dargestellt. Gemäß (2.1) wird die homogene Transformation des Endeffektorkoordinatensystems $(0_ex_ey_ez_e)$ in Bezug auf das Inertialkoordinatensystem $(0_0x_0y_0z_0)$ durch

$$\mathbf{H}_0^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^e(\mathbf{q}) & \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

als Funktion der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ beschrieben. Weiters wird jedes Glied des Roboters mit einem Koordinatensystem $(0_ix_iy_iz_i)$, $i = 1, \dots, n$, ausgestattet. Dabei ist

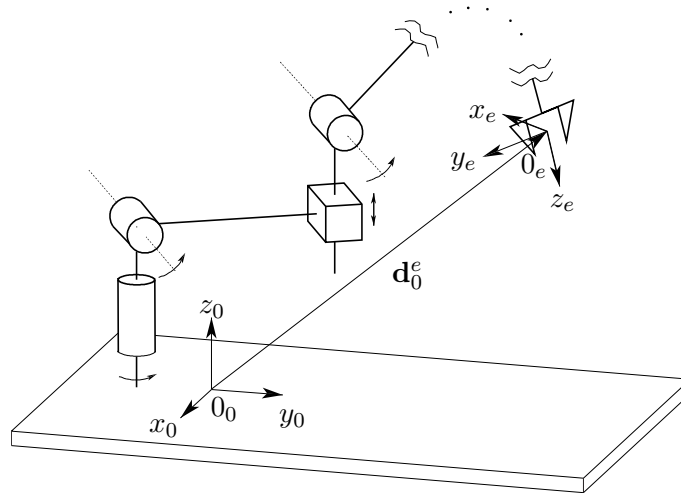


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung einer seriellen kinematischen Kette [3.2].

es von Vorteil, jeweils eine Achse der Koordinatensysteme in die jeweilige Rotations- bzw. Translationsachse zu legen. Wie in Abbildung 2.4 gezeigt, entsteht dadurch eine Kette von Koordinatensystemen, welche mithilfe der homogenen Transformationen in der Form

$$\mathbf{H}_0^n(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_0^1(q_1)\mathbf{H}_1^2(q_2) \cdots \mathbf{H}_{i-1}^i(q_i) \cdots \mathbf{H}_{n-1}^n(q_n) \quad (2.4)$$

beschrieben wird, siehe (2.2). Jede der Transformationen $\mathbf{H}_{i-1}^i(q_i)$, $i = 1, \dots, n$, in (2.4) beschreibt dabei die Kinematik von genau einem Freiheitsgrad q_i und ist aus den elementaren Transformationen für Rotation und Translation zusammengesetzt. Weiters werden die (üblicherweise konstanten) Transformationen \mathbf{H}_b^0 und \mathbf{H}_n^e zu (2.2) hinzugefügt, welche das Koordinatensystem der Roboterbasis b in Bezug auf das Inertialkoordinatensystem 0 bzw. das Endeffektorkoordinatensystem e in Bezug auf das Koordinatensystem des letzten Robotergliedes n beschreibt. Damit folgt die Beschreibung der Roboterkinematik als homogene Transformation zu

$$\mathbf{H}_b^e(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_b^0\mathbf{H}_0^n(\mathbf{q})\mathbf{H}_n^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^e(\mathbf{q}) & \mathbf{d}_b^e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Um die Vorwärtskinematik in der Form (1.3) zu erhalten, wird $\mathbf{H}_b^e(\mathbf{q})$ schließlich in Form der m Koordinaten des Arbeitsraums

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_b^e(\mathbf{q}) \\ \phi(\mathbf{R}_b^e(\mathbf{q})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_e \\ \phi_e \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

dargestellt. In (2.6) setzt sich die Pose des Endeffektors \mathbf{x}_e im Arbeitsraum aus dem Vektor \mathbf{d}_b^e zum Ursprung des Endeffektorkoordinatensystems und einer Minimalkoordinatendarstellung der Orientierung $\phi(\cdot)$ zusammen. Weiters wurden die Kurzbezeichnungen \mathbf{p}_e und ϕ_e für die Position und Orientierung des Endeffektors im Arbeitsraum eingeführt. Im nächsten Abschnitt werden Minimalkoordinatendarstellungen für die Orientierung im Detail diskutiert.

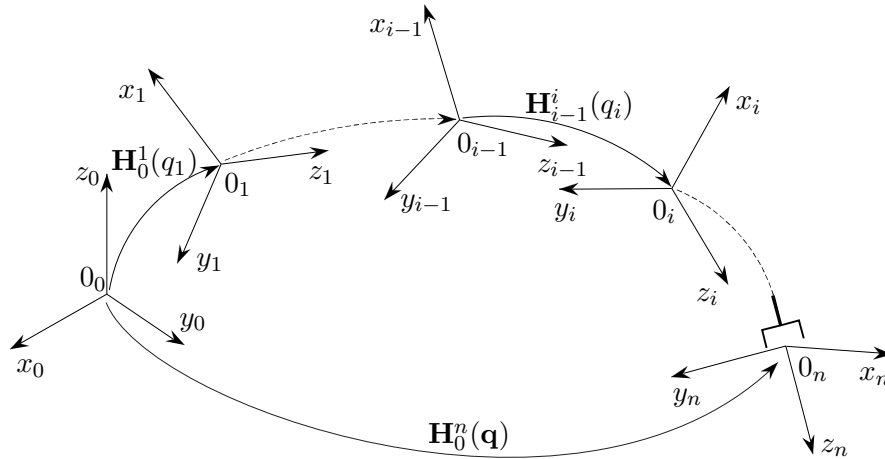


Abbildung 2.4: Koordinatensysteme eines Roboters mit serieller Kinematik [3.2].

2.1.3 Parametrierung der Orientierung

Im dreidimensionalen Raum besitzt ein Starrkörper 6 Freiheitsgrade, wovon 3 Freiheitsgrade die Orientierung charakterisieren. Bei einer *Minimalkoordinatendarstellung* $\phi(\cdot)$ wird die Orientierung ebenfalls mit genau drei Winkeln parametrierung. Dazu zählen die EULER-Winkel und die TAIT-BRYAN-Winkel, zu denen auch die *Roll-Nick-Gier-Winkel* (engl. *Roll-Pitch-Yaw*, RPY) zählen. Darüber hinaus kann die Orientierung auch mit mehr als drei Parametern angegeben werden, wie z. B. durch die Rotationsmatrix (9 Parameter), Quaternionen (4 Parameter) und der Achse-Winkel-Darstellung (4 Parameter). In Abschnitt 2.3.2 werden die Eigenschaften von Minimal- und Nicht-Minimalkoordinatendarstellungen beschrieben. Minimalkoordinatendarstellungen werden in der industriellen Robotik am häufigsten verwendet und praktisch jede Robotersteuerung verwendet sie, um Endeffektorposen im Raum zu parametrieren. Im Folgenden werden die mathematischen Grundlagen für die Minimalkoordinatendarstellungen eingeführt.

Im Allgemeinen erhält man Minimalkoordinatendarstellungen aus einer Rotationsmatrix \mathbf{R} in der Form

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \phi_{ijk}(\mathbf{R}), \quad i, j, k \in \{x, y, z\}, \quad (2.7)$$

wobei \mathbf{R} aus einer Sequenz von drei Rotationen besteht, d. h.

$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_{i,\phi} \mathbf{R}_{j,\theta} \mathbf{R}_{k,\psi}. \quad (2.8)$$

Für die EULER-Winkel gilt $i = k$ in (2.7) und für die TAIT-BRYAN-Winkel $i \neq j \neq k$. An dieser Stelle sei erwähnt, dass Minimalkoordinatendarstellungen mit $i = j$ oder $j = k$ degeneriert sind und nicht den gesamten $\text{SO}(3)$ beschreiben können. Während (2.8) direkt ausgewertet werden kann, verbergen sich hinter (2.7) komplexere Zusammenhänge mit Fallunterscheidungen.

Die *klassischen* EULER-Winkel verwenden $i = z$, $j = y$ und $k = z$ als Sequenz der drei Rotationen, also $\phi_{zyz}(\cdot)$. Die zugehörige Rotationsmatrix lautet

$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{z,\psi} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

wobei $s_x = \sin(x)$ und $c_x = \cos(x)$ kompakte Notationen für die trigonometrischen Funktionen sind. Unter der Annahme $r_{13} \neq 0$ und $r_{23} \neq 0$ lassen sich die EULER-Winkel für $0 < \theta < \pi$ aus den Elementen der Drehmatrix (2.9) mit

$$\phi_{zyz}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \text{atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \text{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

berechnen. Für den Fall $-\pi < \theta < 0$ folgt

$$\phi_{zyz}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \\ \text{atan2}\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \text{atan2}(-r_{32}, r_{31}) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

In (2.10) und (2.11) ist $\text{atan2}(y, x)$ die vorzeichenkorrekte Auswertung des Arkustangens $\arctan(y/x)$ in allen vier Quadranten.

Die RPY-Winkel verwenden die Konvention $\phi_{zyx}(\cdot)$ und die Rotationsmatrix $\mathbf{R}(\phi)$ ergibt sich zu

$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\psi} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ s_\phi c_\theta & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Die Lösung für $\phi_{zyx}(\cdot)$ für den Fall $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ mit $r_{32} \neq 0$ und $r_{33} \neq 0$ ist

$$\phi_{zyx}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

und für $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ folgt

$$\phi_{zyx}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \text{atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \text{atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

2.1.4 6-Achs-Roboter mit sphärischem Handgelenk

Die Grundlagen zur Vorwärtskinematik werden in diesem Abschnitt am Beispiel eines 6-Achs-Roboters mit sphärischem Handgelenk veranschaulicht. Ein *sphärisches Handgelenk* (engl. *spherical wrist*) ist ein gängiger Begriff in der industriellen Robotik und bezeichnet eine Konstellation von drei aufeinanderfolgenden Rotationsgelenken, deren Achsen sich in *einem* Punkt schneiden. Dies ist in Abbildung 2.5 mit den Gelenken 4, 5 und 6 schematisch dargestellt. Ähnlich wie ein Kugelgelenk bietet diese Anordnung 3 Freiheitsgrade und ermöglicht es, den Endeffektor beliebig im gesamten $SO(3)$ zu orientieren. Im Gegensatz zu einem Kugelgelenk kann allerdings ein mechanisches Blockieren (engl. *gimbal lock*) auftreten wenn gilt $q_5 = 0$. In diesem Fall sind die Achsen z_4 und z_6 parallel zueinander und eine Drehung um die x_4 -Achse ist nicht möglich.

Beispiel 2.1 (6-Achs-Roboter mit sphärischem Handgelenk). In diesem Beispiel wird die Vorwärtskinematik des 6-Achs-Roboters mit sphärischem Handgelenk hergeleitet. Die kinematische Kette mit den zugehörigen Koordinatensystemen $(0_i x_i y_i z_i)$, $i = 1, \dots, 6$ ist schematisch in Abbildung 2.5 dargestellt. Das Inertialkoordinatensystem wird mit 0 bezeichnet und jedes weitere Koordinatensystem i liegt körperfest im Glied i des Roboters. Die 6 Rotationsgelenke mit den Koordinaten $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_6]$ verbinden jeweils das Glied $i - 1$ mit dem Glied i . Aus der Abbildung können die geometrischen Zusammenhänge als homogene Transformationen abgelesen werden, welche sich aus den elementaren Translationen und Rotationen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^1(q_1) &= \mathbf{H}_{Rz,q_1} \mathbf{H}_{Tz,d_1} & \mathbf{H}_1^2(q_2) &= \mathbf{H}_{Ry,q_2} \mathbf{H}_{Tz,d_2} \\ \mathbf{H}_2^3(q_3) &= \mathbf{H}_{Ry,q_3} & \mathbf{H}_3^4(q_4) &= \mathbf{H}_{Rz,q_4} \mathbf{H}_{Tz,d_4} \\ \mathbf{H}_4^5(q_5) &= \mathbf{H}_{Ry,q_5} & \mathbf{H}_5^6(q_6) &= \mathbf{H}_{Rz,q_6} \mathbf{H}_{Tz,d_6} \end{aligned}$$

zusammensetzen. Analog zu (2.4) und (2.6) folgt mit

$$\mathbf{H}_0^6(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_0^1(q_1) \mathbf{H}_1^2(q_2) \mathbf{H}_2^3(q_3) \mathbf{H}_3^4(q_4) \mathbf{H}_4^5(q_5) \mathbf{H}_5^6(q_6) \quad (2.15)$$

die Vorwärtskinematik gemäß

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^6(\mathbf{q}) \\ \phi_{zyz}(\mathbf{R}_0^6(\mathbf{q})) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

wobei mit $\phi_{zyz}(\cdot)$ die klassischen EULER-Winkel zur Parametrierung der Orientierung gewählt wurden.

Das obige Ergebnis kann durch Einsetzen einfacher Konfigurationen \mathbf{q} überprüft werden. Mit $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ steht der 6-Achs-Roboter aufrecht und das Endeffektorkoordinatensystem $(0_6 x_6 y_6 z_6)$ liegt auf der z_0 -Achse und hat die selbe Orientierung wie das Inertialkoordinatensystem. Die Koordinaten im Arbeitsraum lauten

$$\mathbf{x}_e^T = [0, 0, d_1 + d_2 + d_4 + d_6, 0, 0, 0] . \quad (2.17)$$

Für $\mathbf{q}^T = [\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0, 0, 0]$ ergibt sich

$$\mathbf{x}_e^T = [0, d_4 + d_6, d_1 + d_2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0]. \quad (2.18)$$

Für diesen Fall ist das Gelenk 1 um $\frac{\pi}{2}$ gedreht und das Gelenk 3 um $\frac{\pi}{2}$, womit die Glieder 1 und 2 des Roboters parallel zur z_0 -Achse sind und der restliche Arm in Richtung der y_0 -Achse zeigt. Das Endeffektorkoordinatensystem ist gegenüber dem Inertialkoordinatensystem entsprechend der Konvention $\phi_{zyz}(\cdot)$ zuerst um $\frac{\pi}{2}$ um die z_0 -Achse und dann um $\frac{\pi}{2}$ um die neue y -Achse gedreht. Damit ist die z_6 -Achse parallel zur y_0 -Achse und die x_6 -Achse ist antiparallel zur z_0 -Achse.

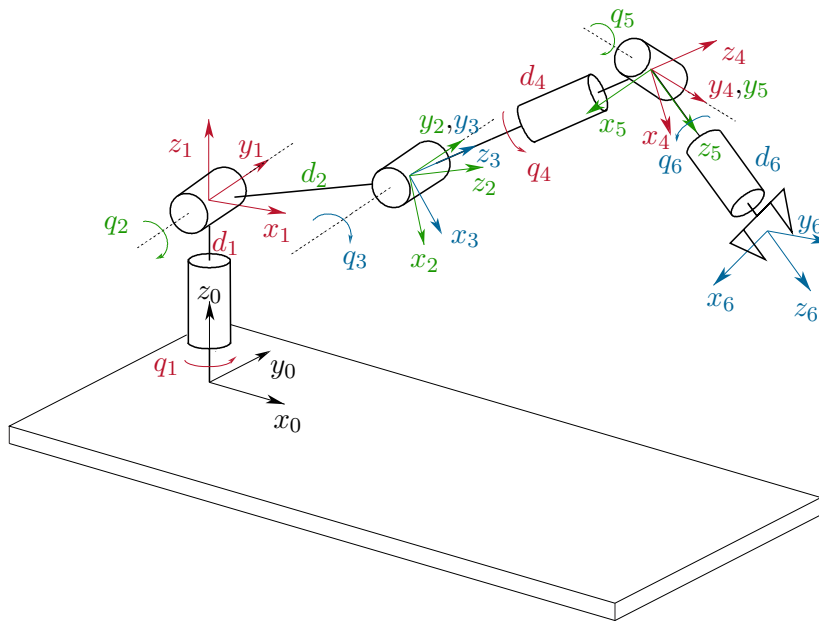


Abbildung 2.5: 6-Achs-Roboter mit sphärischem Handgelenk [3.2].

2.2 Inverse Kinematik

Für Roboter mit serieller Kinematik kann die Lage des Endeffektors mithilfe von (2.4) eindeutig für jede Konfiguration \mathbf{q} berechnet werden. Andererseits ist das Problem der inversen Kinematik wesentlich komplexer, da die Gleichung (1.3) invertiert werden muss (siehe (1.4)), um für eine gegebene Pose im Arbeitsraum \mathbf{x}_e die zugehörige Konfiguration \mathbf{q} zu berechnen. Die zu lösende Gleichung (1.3) ist im Allgemeinen nichtlinear und es ist nicht immer möglich, geschlossene analytische Ausdrücke als Lösung zu finden. Dies ist nur für einfache kinematische Ketten der Fall bzw. für kinematische Ketten mit spezieller Struktur. Es benötigt daher entweder eine algebraische Intuition, um geeignete Gleichungen für die unbekanntenen Größen zu finden oder eine geometrische Intuition, um geeignete Zwischenpunkte zu finden, damit das Problem der inversen Kinematik analytisch

lösbar wird. Aufgrund der nichtlinearen Zusammenhänge können keine, eine, mehrere oder unendlich viele Lösungen für eine gegebene Konfiguration \mathbf{q} existieren.

Im Folgenden wird die analytische Lösung der inversen Kinematik für einige Beispiele gezeigt, die häufig in der Industrie vorkommen.

Beispiel 2.2 (Inverse Kinematik eines 3-Achs-Roboters in RRR-Struktur). Der in Abbildung 2.6 gezeigte 3-Achs-Roboter in RRR-Struktur entspricht dem 6-Achs-Roboter aus Abbildung 2.5 ohne sphärischem Handgelenk, d. h. ohne die Gelenke 4, 5 und 6. Das Endeffektorkoordinatensystem des 3-Achs-Roboters (${}_{0}x_4y_4z_4$) liegt dort wo beim 6-Achs-Roboter der Handgelenkspunkt (engl. *wrist*, W) zu finden ist. Weitere ausgezeichnete Punkte des 3-Achs-Roboters sind die *Schulter* (engl. *shoulder*, S) und der *Ellenbogen* (engl. *elbow*, E), in Analogie zum menschlichen Arm.

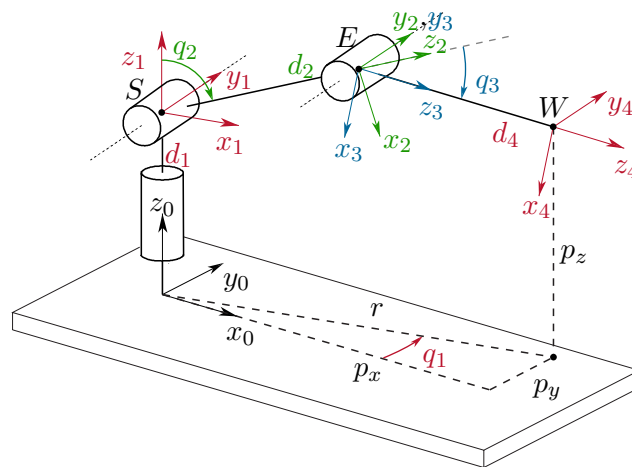
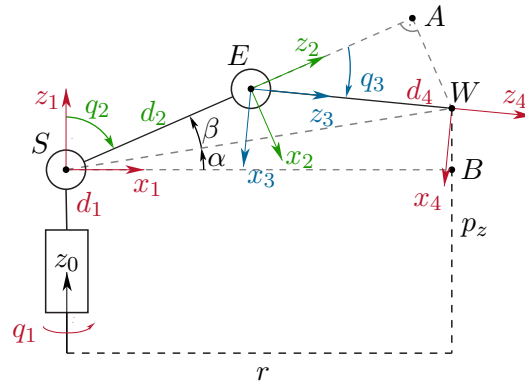


Abbildung 2.6: 3-Achs-Roboter in RRR-Struktur [3.2].

Der dreidimensionale Konfigurationsraum $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ q_3]$, $n = 3$, erlaubt es, einen dreidimensionalen Arbeitsraum ($m = 3$) zu wählen. Als Koordinaten im Arbeitsraum wird der Ursprung des Endeffektorkoordinatensystems mit $\mathbf{x}_e = \mathbf{p}_0^4 = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ gewählt, siehe Abbildung 2.6. In der (x_0y_0) -Ebene bilden die Geradenstücke p_x und p_y ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. Aus struktureller Sicht handelt es sich bei dem 3-Achs-Roboter um einen planaren 2-Achs-Roboter, dessen Bewegungsebene (aufgespannt durch die z_0 -Achse und die Gerade r) mit q_1 gedreht werden kann.

Abbildung 2.7: Ansicht der z_0 - r -Ebene des 3-Achs-Roboters.

Für $p_x \neq 0$ und/oder $p_y \neq 0$ folgt damit der erste Freiheitsgrad zu

$$q_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) . \quad (2.19)$$

Für das Dreieck (SEW), siehe Abbildung 2.7, lautet der Kosinussatz für den Winkel $\pi - q_3$

$$r^2 + (p_z - d_1)^2 = d_2^2 + d_4^2 - 2d_2d_4 \cos(\pi - q_3) . \quad (2.20)$$

Unter Berücksichtigung von $\cos(\pi - q_3) = -\cos(q_3)$ ergibt sich

$$c_{q_3} = \cos(q_3) = \frac{r^2 + (p_z - d_1)^2 - d_2^2 - d_4^2}{2d_2d_4} \quad (2.21)$$

und damit

$$q_3 = \pm \arccos(c_{q_3}) , \quad (2.22)$$

unter der Voraussetzung, dass der Punkt \mathbf{x}_e im Arbeitsraum des 3-Achs-Roboters liegt, also $\sqrt{r^2 + (p_z - d_1)^2} \leq d_2 + d_4$ gilt. Auf ähnliche Weise kann der verbleibende Winkel q_2 berechnet werden. Aus dem Dreieck (SBW) wird die Zwischengröße α gemäß

$$\alpha = \text{atan2}(p_z - d_1, r) \quad (2.23)$$

berechnet und der Zusammenhang

$$\cos(\beta) \sqrt{r^2 + (p_z - d_1)^2} = d_2 + d_4 \cos(q_3) \quad (2.24)$$

ist durch zweimalige Projektion im Dreieck (SWA) ersichtlich. Unter Verwendung von (2.21) berechnet sich die Zwischengröße β zu

$$\beta = \arccos\left(\frac{r^2 + (p_z - d_1)^2 + d_2^2 - d_4^2}{2d_2 \sqrt{r^2 + (p_z - d_1)^2}}\right) \quad (2.25)$$

und es folgt der verbleibende Winkel q_2 gemäß

$$q_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha \mp \beta . \quad (2.26)$$

Bisher wurden also zwei unterschiedliche Lösungen gefunden: Die *Elbow-Up*-Lösung hat ein negatives Vorzeichen in (2.26) und ein positives Vorzeichen in (2.22) und für die *Elbow-Down*-Lösung ist es umgekehrt. Insgesamt besitzt der 3-Achs-Roboter mit RRR-Struktur vier unterschiedliche Lösungen, wie in Abbildung 2.8 gezeigt ist. Wird die erste Achse um 180° gedreht mit $q'_1 = q_1 + \pi$, der zweite Winkel zu $q'_2 = -q_2$ und der dritte Winkel zu $q'_3 = -q_3$ gewählt, so können die zwei weiteren Lösungen gefunden werden.

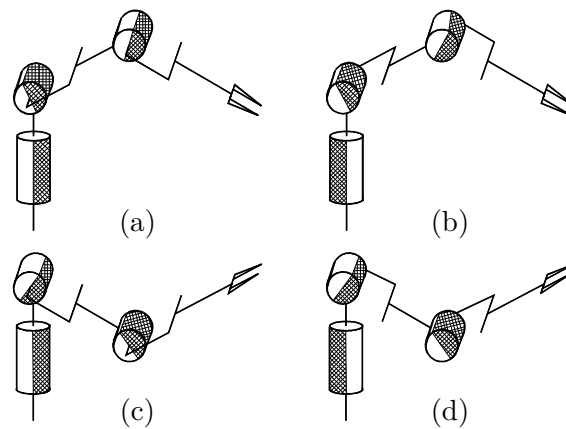


Abbildung 2.8: Vier Konfigurationen für die inverse Kinematik des 3-Achs-Roboters: (a) Shoulder-Right/Elbow-Up, (b) Shoulder-Left/Elbow-Up, (c) Shoulder-Right/Elbow-Down, (d) Shoulder-Left/Elbow-Down [3.2].

Beispiel 2.3 (Inverse Kinematik des sphärischen Handgelenks). Abbildung 2.9 zeigt eine schematische Darstellung eines sphärischen Handgelenks und den zugehörigen Koordinatensystemen $(0_i x_i y_i z_i)$, welche jeweils körperfest im Glied i liegen, $i = 4, 5, 6$. Die Glieder sind durch die drei Rotationsgelenke mit den Koordinaten $\mathbf{q}^T = [q_4 \ q_5 \ q_6]$ verbunden. Die kinematische Kette wird nun anhand der homogenen Transformationen

$$\mathbf{H}_0^6(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_0^4(q_4) \mathbf{H}_4^5(q_5) \mathbf{H}_5^6(q_6) \quad (2.27)$$

mit

$$\mathbf{H}_0^4(q_4) = \mathbf{H}_{Rz,q_4} \mathbf{H}_{Tz,d_4} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{H}_4^5(q_5) = \mathbf{H}_{Ry,q_5} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{H}_5^6(q_6) = \mathbf{H}_{Rz,q_6} \mathbf{H}_{Tz,d_6} \quad (2.30)$$

beschrieben, welche direkt aus Abbildung 2.9 abgelesen werden können. Es ist zu beachten, dass sich die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_0^6(\mathbf{q})$ in (2.27) zu

$$\mathbf{R}_0^6(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} - s_{q_4}s_{q_6} & -c_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} - s_{q_4}c_{q_6} & c_{q_4}s_{q_5} \\ s_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} + c_{q_4}s_{q_6} & -s_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} + c_{q_4}c_{q_6} & s_{q_4}s_{q_5} \\ -s_{q_5}c_{q_6} & s_{q_5}s_{q_6} & c_{q_5} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ergibt, welche die gleiche Form aufweist wie die Rotationsmatrix für die klassischen EULER-Winkel in (2.9) mit $\phi = q_4$, $\theta = q_5$ und $\psi = q_6$. Dies kommt durch die Wahl der Koordinatensysteme und durch die gewählte Sequenz von Drehungen in der kinematischen Struktur zustande. Durch diesen Zusammenhang folgt sofort mit den Gleichungen (2.10) und (2.11) die inverse Kinematik für das sphärische Handgelenk eines Roboters für eine gegebene Orientierung ϕ bzw. für eine gegebene Rotationsmatrix in der Form (2.9). Für jede Orientierung im Arbeitsraum existieren somit zwei Sätze von Lösungen \mathbf{q} .

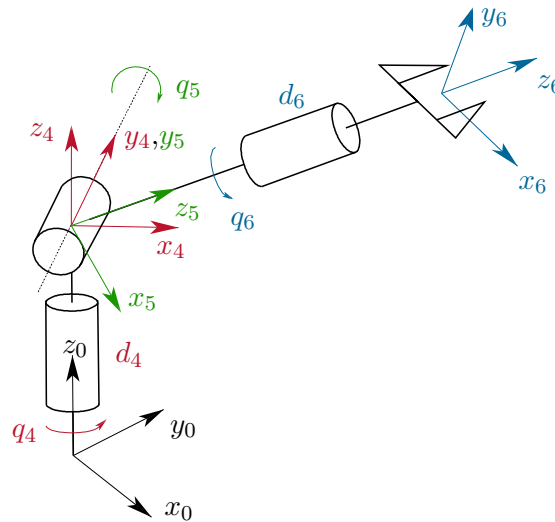


Abbildung 2.9: Sphärisches Handgelenk [3.2].

Beispiel 2.4 (Inverse Kinematik des 6-Achs-Roboters mit sphärischem Handgelenk). Aufbauend auf den drei Beispielen 2.1, 2.2 und 2.3, soll in diesem Beispiel die inverse Kinematik des 6-Achs-Roboters mit sphärischem Handgelenk in Abbildung 2.5 analytisch gelöst werden. Industrieroboter sind meist mit einer einfachen Kinematik aufgebaut, damit die inverse Kinematik analytisch lösbar bleibt. Dies ist der Fall wenn

- sich drei aufeinanderfolgende Achsen in einem einzelnen Punkt schneiden, wie z. B. beim sphärischen Handgelenk, oder wenn

- drei aufeinanderfolgende Rotationsgelenke zueinander parallele Rotationsachsen aufweisen.

Damit kann das Lösen der inversen Kinematik in zwei Teilprobleme getrennt werden, denn in diesem Fall ist die Lösung der Endeffektorposition von der Lösung der Orientierung entkoppelt.

Im 6-dimensionalen Arbeitsraum wird nun eine Endeffektorpose $\mathbf{x}_e^T = [\mathbf{p}_e^T \ \phi_e^T]$ vorgegeben und die zugehörigen Konfigurationen $\mathbf{q}^T = [q_1 \ \dots \ q_6]$ werden gesucht. Es ist daher $\mathbf{R}_0^6 = \mathbf{R}(\phi_e)$ gemäß (2.9) und $\mathbf{d}_0^6 = \mathbf{p}_e$. Für die inverse Kinematik des 6-Achs-Roboters mit sphärischem Handgelenk wird der Handgelenkspunkt O_4 als Bezugspunkt gewählt und die Position dieses Punktes folgt zu

$$\mathbf{d}_0^4 = \mathbf{d}_0^6 - \mathbf{R}_0^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix}^T. \quad (2.32)$$

Wie anhand von (2.15) nachvollzogen werden kann, ist der Vektor \mathbf{d}_0^4 ausschließlich eine Funktion der ersten drei Gelenke, also gilt $\mathbf{d}_0^4 = \mathbf{d}_0^4(q_1, q_2, q_3)$. Es ist zu beachten, dass dies nicht für die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_0^4 = \mathbf{R}_0^4(q_1, q_2, q_3, q_4)$ gilt, wie auch in Abbildung 2.5 ersichtlich ist: q_4 dreht um die Längsachse des Gliedes 4 und bewegt damit den Ursprung des Koordinatensystems (${}_{0_4}x_4y_4z_4$) nicht.

Damit kann die inverse Kinematik in folgenden Schritten gelöst werden.

1. Berechnen des Handgelenkspunktes $\mathbf{d}_0^4(q_1, q_2, q_3)$ gemäß (2.32).
2. Lösen der inversen Kinematik für (q_1, q_2, q_3) analog zu Beispiel 2.2.
3. Berechnen von $\mathbf{R}_0^3(q_1, q_2, q_3)$ mithilfe von (2.15).
4. Berechnen von $\mathbf{R}_3^6(q_4, q_5, q_6) = \mathbf{R}_0^3(q_1, q_2, q_3)^T \mathbf{R}_0^6$.
5. Lösen der inversen Kinematik für (q_4, q_5, q_6) analog zu Beispiel 2.3.

2.3 Differentielle Kinematik

Die vorigen beiden Abschnitte 2.1 und 2.2 zur Vorwärtskinematik bzw. inversen Kinematik haben den Zusammenhang zwischen den Positionen im Konfigurationsraum und dem Arbeitsraum eines Roboters hergestellt. Die *differentielle Kinematik* beschäftigt sich nun mit den *Geschwindigkeiten* im Konfigurations- und Arbeitsraum und den mathematischen Beziehungen zwischen den Räumen. Die wichtigsten Werkzeuge dabei sind die *analytische* und die *geometrische Manipulator Jacobi-Matrix*. Zusätzlich können mit diesen Matrizen kinematische Eigenschaften von Robotern analysiert, wie z. B. Singularitäten und Redundanzen, und auch numerische Lösungen der inversen Kinematik gefunden werden.

2.3.1 Analytische und geometrische Manipulator Jacobi-Matrix

Die Geschwindigkeit des Endeffektors beschrieben durch die Pose im m -dimensionalen Arbeitsraum \mathbf{x}_e wird durch zeitliches Ableiten der Vorwärtskinematik (2.6) gemäß

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.33)$$

mit der $m \times n$ analytischen Manipulator Jacobi-Matrix (engl. *analytical Jacobian*)

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (2.34)$$

berechnet. In (2.33) wurde die translatorische Endeffektorgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{p}}_e$ und die rotatorische Geschwindigkeit in Minimalkoordinatendarstellung $\dot{\boldsymbol{\phi}}_e$ eingeführt. Direktes berechnen von $\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})/\partial \mathbf{q}$ ist für die Koordinaten der Orientierung meist nicht möglich, weil $\boldsymbol{\phi}_e(\mathbf{q})$ nicht in Form von geschlossenen Ausdrücken vorliegt, sondern über die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_0^e(\mathbf{q})$ berechnet werden muss, siehe (2.7) bzw. (2.10) und (2.11).

An dieser Stelle soll hervorgehoben werden, dass sich die analytische Manipulator Jacobi-Matrix von der (*geometrischen*) Manipulator Jacobi-Matrix (engl. *geometric Jacobian* oder *body Jacobian*) unterscheidet, welche in der Vorlesung *Modellbildung* eingeführt wurde [3.1]. Diese ist in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_0^e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.35)$$

definiert und beschreibt die rotatorische Geschwindigkeit als Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_0^e$ des Endeffektorkoordinatensystems e gegenüber dem Inertialkoordinatensystem 0. Der Vektor mit den Komponenten $\boldsymbol{\omega}_0^e = [\omega_{0,1}^e \ \omega_{0,2}^e \ \omega_{0,3}^e]^T$ ergibt sich aus der Rotationsmatrix des Endeffektors \mathbf{R}_0^e und dessen Zeitableitung mit

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^e) = \dot{\mathbf{R}}_0^e(\mathbf{R}_0^e)^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{0,3}^e & \omega_{0,2}^e \\ \omega_{0,3}^e & 0 & -\omega_{0,1}^e \\ -\omega_{0,2}^e & \omega_{0,1}^e & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

unter Verwendung des schiefsymmetrischen Operators $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$ [3.1]. Während sowohl $\dot{\boldsymbol{\phi}}_e$ als auch $\boldsymbol{\omega}_0^e$ Drehgeschwindigkeiten des Endeffektorkoordinatensystems beschreiben, führt das zeitliche Integral von $\boldsymbol{\omega}_0^e$ zu keinem sinnvollen Ausdruck für die Orientierung. Im Gegensatz dazu ist $\boldsymbol{\phi}_e = \int \dot{\boldsymbol{\phi}}_e dt$ ein gültiger Zusammenhang. Dies illustriert das folgende Beispiel.

Beispiel 2.5 (Integral des Vektors der Drehwinkelgeschwindigkeiten). Es sei die Orientierung eines Starrkörpers zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt. Beginnend bei dieser Orientierung wird der Starrkörper mit zwei unterschiedlichen Zeitverläufen für den Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeit gedreht, nämlich

$$\boldsymbol{\omega}_1(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}^T & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad (2.37)$$

und

$$\boldsymbol{\omega}_2(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}^T & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}. \quad (2.38)$$

Das Integral über den gesamten Zeitverlauf $0 \leq t \leq 2$ liefert für beide Fälle

$$\int_0^2 \boldsymbol{\omega}_i(t) dt = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, 2, \quad (2.39)$$

jedoch kommt in beiden Fällen eine ganz unterschiedliche Lage für den Starrkörper zum Zeitpunkt $t = 2$ heraus, wie dies in Abbildung 2.10 dargestellt ist.

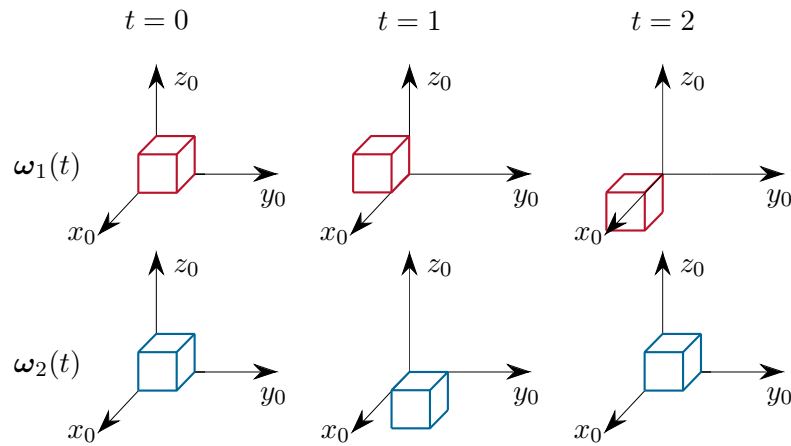


Abbildung 2.10: Bewegung des Starrkörpers, welcher mit $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ bzw. mit $\boldsymbol{\omega}_2(t)$ rotiert wird [3.2].

Der Zusammenhang zwischen $\dot{\boldsymbol{\phi}}_e$ und $\boldsymbol{\omega}_0^e$ wird mithilfe von (2.9) mit $\mathbf{R}_0^e = \mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}_e)$ und (2.36) über eine Transformationsmatrix $\mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}_e)$ gemäß

$$\boldsymbol{\omega}_0^e = \mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}_e) \dot{\boldsymbol{\phi}}_e \quad (2.40)$$

beschrieben. Diese Matrix $\mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}_e) = \mathbf{T}_{ijk}(\boldsymbol{\phi}_e)$ folgt für die Konvention der Minimalkoordinatendarstellung $i, j, k \in \{x, y, z\}$ aus dem Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_0^e$ in der Form

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}_e) = \mathbf{T}_{ijk}(\boldsymbol{\phi}_e) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{\omega}_0^e \quad (2.41)$$

und lautet für die klassischen EULER-Winkel

$$\mathbf{T}_{zyz}(\boldsymbol{\phi}_e) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \\ 1 & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

und für die RPY-Winkel

$$\mathbf{T}_{zyx}(\phi_e) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ 1 & 0 & -\sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Schließlich folgt mit (2.40) der Zusammenhang zwischen den Manipulator Jacobi-Matrizen $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ und $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \omega_0^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \mathbf{T}(\phi_e) \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\phi_e) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\phi_e) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{q})} \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.44)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} .

2.3.2 Singularitäten

In der Robotik bezeichnet der Begriff *Singularität* einen Punkt oder Bereich im Konfigurations- oder Arbeitsraum des Roboters bei dem eine Bewegungseinschränkung auftritt. Es gibt eine Reihe von unterschiedlichen Arten von Singularitäten, welche nach der Ursache kategorisiert sind. Im Folgenden werden die häufigsten Arten von Singularitäten für Roboter mit serieller Kinematik aufgelistet und diskutiert.

Kinematische Singularität

Wie in (2.35) gezeigt, bildet die geometrische Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ die Geschwindigkeiten im Konfigurationsraum $\dot{\mathbf{q}}$ linear auf die Geschwindigkeiten im Arbeitsraum $[\dot{\mathbf{p}}_e^T (\omega_0^e)^T]^T$ ab, wobei die Jacobi-Matrix selbst im Allgemeinen *nichtlinear* von der Konfiguration \mathbf{q} abhängt. *Kinematische Singularitäten* bezeichnen jene Konfigurationen \mathbf{q} , an denen ein Rangverlust im Zeilenrang der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ auftritt. Das bedeutet, dass die Abbildung (2.35) nicht mehr alle Geschwindigkeiten im Arbeitsraum $[\dot{\mathbf{p}}_e^T (\omega_0^e)^T]^T$ linear unabhängig voneinander erzeugen kann. Für den Fall $m = n$ ist $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ quadratisch und Konfigurationen \mathbf{q} mit Rangverlust können direkt aus der Gleichung $\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) = 0$ ermittelt werden. In der Nähe einer Singularität hat die geometrische Manipulator Jacobi-Matrix zwar vollen Rang, ist aber schlecht konditioniert. Dadurch können in der Nähe einer Singularität große Geschwindigkeiten im Konfigurationsraum auftreten, um bestimmte Bewegungen im Arbeitsraum hervorzurufen.

- **Singularität am Rand des Arbeitsbereichs:** Diese Art von Singularität tritt immer dann auf, wenn der Roboter ganz ausgestreckt oder ganz eingezogen ist. Dies stellt aber keine zusätzliche Einschränkung in der Bewegungsfreiheit des Roboters dar, da der Arbeitsbereich ohnehin durch die mechanische Konstruktion des Roboters beschränkt ist.

- **Singularität im Inneren des Arbeitsbereichs:** Kinematische Singularitäten können auch im Inneren des Arbeitsbereiches auftreten, z. B. wenn die Rotationsachsen von zwei oder mehreren Rotationsgelenken kollinear werden. Eine übergeordnete Pfadplanung muss daher im Vorhinein verhindern, dass der Roboter in solche kinematischen Singularitäten hineinfährt oder in die Nähe von solchen Singularitäten kommt.

Beispiel 2.6 (Kinematische Singularitäten des 3-Achs-Roboters). In diesem Beispiel werden die kinematischen Singularitäten des 3-Achs-Roboters aus Beispiel 2.2 betrachtet. Der Roboter mit drei Rotationsgelenken und den körperfesten Koordinatensystemen $(0_i x_i y_i z_i)$, $i = 1, \dots, 4$ ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Aus dieser Abbildung werden die homogenen Transformationen zwischen den Koordinatensystemen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^1(q_1) &= \mathbf{H}_{Rz,q_1} \mathbf{H}_{Tz,d_1} & \mathbf{H}_1^2(q_2) &= \mathbf{H}_{Ry,q_2} \mathbf{H}_{Tz,d_2} \\ \mathbf{H}_2^3(q_3) &= \mathbf{H}_{Ry,q_3} & \mathbf{H}_3^4 &= \mathbf{H}_{Tz,d_4} \end{aligned}$$

bestimmt und es folgt aus

$$\mathbf{H}_0^4(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_0^1(q_1) \mathbf{H}_1^2(q_2) \mathbf{H}_2^3(q_3) \mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^4(\mathbf{q}) & \mathbf{d}_0^4(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

die Vorwärtskinematik des 3-Achs-Roboters gemäß

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{d}_0^4(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (d_4 \sin(q_2 + q_3) + d_2 \sin(q_2)) \cos(q_1) \\ (d_4 \sin(q_2 + q_3) + d_2 \sin(q_2)) \sin(q_1) \\ d_4 \cos(q_2 + q_3) + d_2 \cos(q_2) + d_1 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Um die kinematischen Singularitäten beurteilen zu können, wird die geometrische Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{q})$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{d}_0^4}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.47)$$

und dessen Determinante

$$\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) = d_2 d_4 \underbrace{\sin(q_3)}_{S_1} \left(\underbrace{(d_4 \sin(q_2 + q_3) + d_2 \sin(q_2))}_{S_2} \right) \quad (2.48)$$

berechnet. In (2.48) wurden die beiden Ausdrücke S_1 und S_2 eingeführt: Wird einer der beiden Ausdrücke gleich Null, so verschwindet die Determinante und es liegt eine kinematische Singularität vor. Der Ausdruck S_1 verschwindet, wenn der Roboterarm entweder ganz ausgestreckt ist ($q_3 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, siehe Abbildung 2.11a) oder ganz eingezogen ist ($q_3 = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Für bestimmte Konstellationen aus den

Winkeln q_2 und q_3 liegt der Endeffektor des Roboters auf der z_0 -Achse ($p_x = p_y = 0$) und damit ist der Ausdruck S_2 gleich Null. Dies ist in Abbildung 2.11b dargestellt.

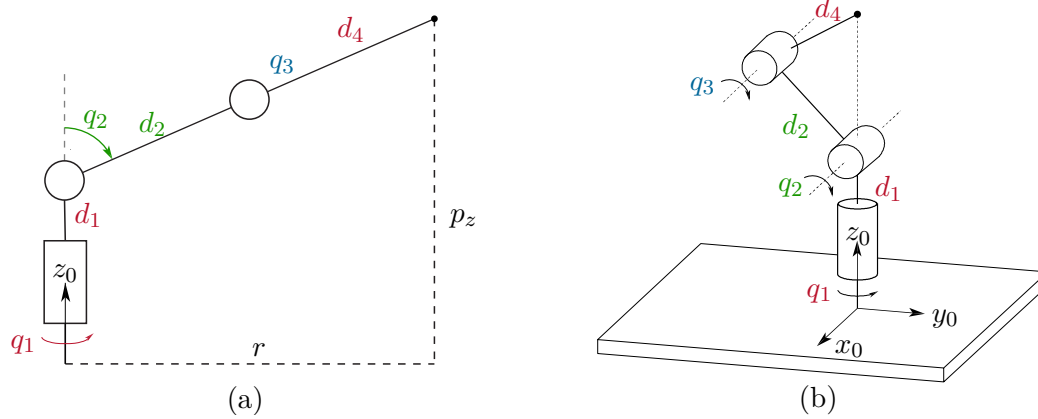


Abbildung 2.11: Kinematische Singularitäten des 3-Achs-Roboters: (a) Ausgestreckter Roboterarm ($S_1 = 0$), (b) Endeffektor liegt auf z_0 -Achse ($S_2 = 0$) [3.2].

Beispiel 2.7 (Kinematische Singularitäten des sphärischen Handgelenks). Ein sphärisches Handgelenk weist kinematische Singularitäten auf, welche bei einem 6-Achs-Roboter mit sphärischem Handgelenk auch im Inneren des Arbeitsbereichs auftreten können. Zur Analyse der kinematischen Kette, siehe Abbildung 2.9 wird daher der Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten mithilfe von (2.36) aus $\mathbf{R}_0^e(\mathbf{q})$ zu

$$\boldsymbol{\omega}_0^6(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_4) \sin(q_5) \dot{q}_6 - \dot{q}_5 \sin(q_4) \\ \sin(q_4) \sin(q_5) \dot{q}_6 + \dot{q}_5 \cos(q_4) \\ \dot{q}_6 \cos(q_5) + \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

berechnet. Es folgt die zugehörige geometrische Manipulator Jacobi-Matrix zu

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(q_4) & \cos(q_4) \sin(q_5) \\ 0 & \cos(q_4) & \sin(q_4) \sin(q_5) \\ 1 & 0 & \cos(q_5) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

mit der Determinante $\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) = -\sin(q_5)$. Singularitäten treten also für $q_5 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ auf. In diesen Fällen sind die Rotationsachsen der Gelenke 4 und 6 kollinear und die Bewegungsfreiheit des Roboters ist damit eingeschränkt: Ist $\dot{q}_4 = -\dot{q}_6$, so wird keine Bewegung am Endeffektor hervorgerufen. Weiters kann in dieser Singularität keine Rotationsgeschwindigkeit um die x_5 -Achse (siehe Abbildung 2.9 für $q_5 = 0$) erzeugt werden, da alle Rotationsgelenke orthogonal dazu stehen.

Repräsentationssingularität

Eine sogenannte *Repräsentationssingularität* ist eine Singularität, die aufgrund der gewählten Koordinatendarstellung im Arbeitsraum auftritt. Die Ursache für diese Art der Singularität liegt daher nicht in der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ (die ausschließlich die kinematische Kette beschreibt), sondern in der analytischen Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ bzw. in der Transformationsmatrix zwischen den beiden Matrizen.

Es lässt sich zeigen, dass bei allen Minimalkoordinatendarstellungen der Orientierung Repräsentationssingularitäten auftreten. Zur Analyse der Singularitäten wird die Determinante von $\mathbf{T}(\phi)$ betrachtet. Für die klassischen EULER-Winkel lautet diese

$$\det(\mathbf{T}_{zyz}(\phi_e)) = -\sin(\theta) \quad (2.51)$$

und für die RPY-Winkel folgt

$$\det(\mathbf{T}_{zyx}(\phi_e)) = -\cos(\theta) . \quad (2.52)$$

Eine Repräsentationssingularität liegt vor, wenn $\det(\mathbf{T}(\phi_e)) = 0$ gilt und damit die Inverse $\mathbf{T}^{-1}(\phi_e)$ nicht existiert. In diesem Fall kann aus einem gegebenen Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten ω_0^e keine zugehörige Winkelgeschwindigkeit der EULER-Winkel ϕ_e berechnet werden, siehe (2.44). Zusätzlich degenerieren in einer Repräsentationssingularität auch die Gleichungen (2.10) und (2.11) bzw. (2.13) und (2.14). Es können ϕ und ψ nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden – nur noch die Summe bzw. die Differenz von ϕ und ψ . Diese Singularitäten lassen sich durch eine andere Parametrierung der Drehung (z. B. Quaternionen) beheben.

2.3.3 Manipulierbarkeit

Die Manipulator Jacobi-Matrix kann auch dazu benutzt werden, um die sogenannte *Manipulierbarkeit* (engl. *manipulability*) des Roboters in der Form

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}_A(\mathbf{q})\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}))} \quad (2.53)$$

als Funktion der Konfiguration \mathbf{q} zu definieren. Das Maß der Manipulierbarkeit sagt aus, wie gut der Roboter in seiner aktuellen Konfiguration \mathbf{q} Bewegungen in *allen* Dimensionen des Arbeitsraums ausführen kann – dies schließt also sowohl Translationen als auch Rotationen mit ein. Der Ausdruck (2.53) wird an den kinematischen Singularitäten Null, siehe Abschnitt 2.3.2. Wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt wird, kann der Gradient von $w(\mathbf{q})$ dazu benutzt werden, um den Abstand zu Singularitäten bei einem kinematisch redundanten Roboter zu maximieren.

2.4 Differentielle inverse Kinematik

Mit der inversen Kinematik in Abschnitt 2.2 werden Konfigurationen \mathbf{q} im Konfigurationsraum für eine gegebene Pose \mathbf{x}_e im Arbeitsraum gesucht. Bei der *differentiellen inversen Kinematik* werden nun zusätzlich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen mit berücksichtigt. Dadurch können nicht nur Lösungen für statische Posen \mathbf{x}_e gefunden

werden, sondern es können ganze Zeitverläufe $\mathbf{x}_e(t)$, $\dot{\mathbf{x}}_e(t)$ und $\ddot{\mathbf{x}}_e(t)$ in Zeitverläufe im Konfigurationsraum $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ übertragen werden.

Im Folgenden wird ein numerisches Verfahren für die differentielle inverse Kinematik zunächst für kinematisch nicht-redundante Roboter, d. h. für $n = m$, vorgestellt. Dieses Verfahren erlaubt es, die Geschwindigkeiten im Konfigurationsraum zu einer gegebenen Trajektorie $\mathbf{x}_e(t)$ zu berechnen. Im darauffolgenden Abschnitt wird das Verfahren auf kinematisch redundante Roboter mit $n > m$ erweitert und im letzten Abschnitt eine Erweiterung auf Beschleunigungen gezeigt.

2.4.1 Kinematisch nicht-redundante Roboter $n = m$

Wenn die Anzahl $m = \dim(\mathbf{x}_e)$ der Koordinaten des Endeffektors im Arbeitsraum \mathbf{x}_e gleich der Anzahl $n = \dim(\mathbf{q})$ der mechanischen Freiheitsgrade \mathbf{q} des Roboters ist, dann ist die analytische Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ quadratisch. Außerhalb von Singularitäten ist $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ regulär und es können daher die Geschwindigkeiten im Konfigurationsraum $\dot{\mathbf{q}}$ direkt durch Inversion von $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ in der Form, siehe (2.33)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_e \quad (2.54)$$

aus den Geschwindigkeiten im Arbeitsraum $\dot{\mathbf{x}}_e$ bestimmt werden. Gleichung (2.54) kann nun direkt zur *numerischen Berechnung der inversen Kinematik* herangezogen werden. Im Folgenden bezeichnet der Index d (engl. für *desired*) eine vorgegebene Sollgröße. Außerdem wird der Schätzwert einer Größe mit dem Hutsymbol gekennzeichnet, also die Schätzung von \mathbf{q}_d ist $\hat{\mathbf{q}}_d$.

Betrachtet man nun die zeitliche Ableitung der vorgegebenen Bewegung des Endeffektors im Arbeitsraum $\dot{\mathbf{x}}_{e,d}(t)$ als Eingangsgröße, dann folgt aus (2.54) die Schätzgleichung

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_A^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{x}}_{e,d} \quad (2.55a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} \quad (2.55b)$$

mit $\mathbf{q}_{d,0}$ als Wert von $\hat{\mathbf{q}}_d$ zum Anfangszeitpunkt $t = 0$. Dabei wird vorausgesetzt, dass $\mathbf{x}_{e,d}(t)$ stetig differenzierbar ist. Ersetzt man nun in (2.55) den Differentialquotienten $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{q}}_d$ durch den Differenzenquotienten

$$\left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{q}}_d\right)(kT_a) \approx \frac{\hat{\mathbf{q}}_d(kT_a) - \hat{\mathbf{q}}_d((k-1)T_a)}{T_a} \quad (2.56)$$

mit der Abtastzeit T_a und $k = 1, 2, 3, \dots$, dann lautet die zeitdiskrete Schätzgleichung

$$\hat{\mathbf{q}}_d(kT_a) = \hat{\mathbf{q}}_d((k-1)T_a) + T_a \mathbf{J}_A^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_d(kT_a))\dot{\mathbf{x}}_{e,d}(kT_a) \quad (2.57a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} . \quad (2.57b)$$

Man beachte, dass die Verwendung des einfachen Differenzenquotienten (2.56) in der Literatur auch unter dem Namen *Integration nach dem expliziten Euler-Verfahren* bekannt ist. Natürlich kann man an dieser Stelle auch aufwändigere Integrationsverfahren höherer Ordnung einsetzen, um von (2.55) zu einem zeitdiskreten System mit der Abtastzeit T_a zu

kommen. Der Nachteil dieser Vorgehensweise besteht aber darin, dass die offene Integration von (2.55) bzw. (2.57) im Allgemeinen zu einer *Drift* führt. Dies kann bekanntermaßen durch den Entwurf eines vollständigen Beobachters gelöst werden. Dazu betrachtet man den Fehler $\hat{\mathbf{e}}_x$ zwischen der vorgegebenen Bewegung im Arbeitsraum des Endeffektors $\mathbf{x}_{e,d}(t)$ und dem geschätzten Verlauf $\hat{\mathbf{x}}_{e,d} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}_d)$, siehe (2.6)

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \mathbf{x}_{e,d}(t) - \hat{\mathbf{x}}_{e,d} = \mathbf{x}_{e,d}(t) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}_d) , \quad (2.58)$$

und dessen Zeitableitung, siehe (2.33)

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{x}}_{e,d}(t) - \mathbf{J}_A(\hat{\mathbf{q}}_d) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{q}}_d . \quad (2.59)$$

Wählt man nun als *Beobachter*

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_A^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_d) (\dot{\mathbf{x}}_{e,d} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{e}}_x) = \mathbf{J}_A^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_d) (\dot{\mathbf{x}}_{e,d} + \mathbf{K} (\mathbf{x}_{e,d} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}_d))) \quad (2.60a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} \quad (2.60b)$$

mit der positiv definiten Matrix \mathbf{K} , dann folgt mit (2.60) eingesetzt in (2.59) die asymptotisch stabile Schätzfehlerdynamik

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x = -\mathbf{K} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.61a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x(0) = \hat{\mathbf{e}}_{x,0} = \mathbf{x}_{e,d}(0) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_{d,0}) . \quad (2.61b)$$

Zusätzlich werden die Fehlerdynamiken (2.61a) entkoppelt, wenn $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$ mit positiven Einträgen $k_j, j = 1, \dots, m$ gewählt wird und es folgt

$$\frac{d}{dt} \hat{e}_{x,j} = -k_j \hat{e}_{x,j} , \quad \hat{e}_x(0) = \hat{e}_{x,0} \quad (2.62)$$

Damit nehmen die Fehler mit den frei vorgebbaren Zeitkonstanten $k_j > 0$ exponentiell gemäß

$$\hat{e}_{x,j}(t) = \hat{e}_{x,0} \exp(-k_j t) . \quad (2.63)$$

ab. Der Beobachter (2.60) kann analog zu (2.57) wiederum zeitdiskret implementiert werden.

2.4.2 Kinematisch redundante Roboter $n > m$

Für den Fall eines kinematisch redundanten Roboters, d. h. $n > m$, hat die analytische Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ gemäß (2.34) n Spalten und m Zeilen und kann nicht mehr wie in (2.54) direkt invertiert werden. Die zusätzlichen Freiheitsgrade werden nun so genutzt, dass nach wie vor das Gleichungssystem (2.33) erfüllt wird, aber gleichzeitig auch die Minimierungsaufgabe

$$\min_{\dot{\mathbf{q}}} V_n(\dot{\mathbf{q}}) = \min_{\dot{\mathbf{q}}} \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_n)^T (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_n) \quad (2.64)$$

mit dem noch frei zu wählenden Vektor der Gelenksgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_n$ gelöst wird. Diese Minimierungsaufgabe mit der Gleichungsnebenbedingung (2.33) löst man durch Minimierung der Funktion

$$L_n(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_n)^T(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_n) + \boldsymbol{\lambda}^T(\dot{\mathbf{x}}_e - \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.65)$$

bezüglich $\dot{\mathbf{q}}$ und $\boldsymbol{\lambda}$. Die Größe $\boldsymbol{\lambda}$ wird auch als *Lagrange-Multiplikator* bezeichnet. Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist durch die Ableitungen erster Ordnung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L_n(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_n)^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.66a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} L_n(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = (\dot{\mathbf{x}}_e - \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad (2.66b)$$

gegeben. Löst man (2.66a) nach $\dot{\mathbf{q}}$ gemäß

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + \dot{\mathbf{q}}_n \quad (2.67)$$

auf und setzt dies in (2.66b) ein, so erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_n. \quad (2.68)$$

Außerhalb von Singularitäten ist die analytische Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ für einen redundanten Roboter *zeilenregulär*, d.h. die m Zeilen sind im Arbeitsraum linear unabhängig und es gilt $\text{rang}(\mathbf{J}_A(\mathbf{q})) = m$. Daraus folgt, dass die quadratische $m \times m$ -Matrix $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})$ regulär und damit invertierbar ist. Somit lässt sich der Lagrange-Multiplikator $\boldsymbol{\lambda}$ in (2.68) gemäß

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{J}_A(\mathbf{q})\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\right)^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_e - \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}_n) \quad (2.69)$$

berechnen. Eingesetzt in (2.67) folgt damit die Lösung der Minimierungsaufgabe (2.64) unter der Gleichungsnebenbedingung (2.33) zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^\dagger \dot{\mathbf{x}}_e + \left(\mathbf{E} - \mathbf{J}_A^\dagger \mathbf{J}_A\right) \dot{\mathbf{q}}_n \quad (2.70)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} und der *rechten Pseudoinversen*

$$\mathbf{J}_A^\dagger = \mathbf{J}_A^T \left(\mathbf{J}_A \mathbf{J}_A^T\right)^{-1}. \quad (2.71)$$

Bemerkung 2.1. Die rechte Pseudoinverse \mathbf{J}_A^\dagger in (2.70) wird oft auch durch $\mathbf{J}_A^* = \mathbf{J}_A^T \left(\mathbf{J}_A \mathbf{J}_A^T + k^2 \mathbf{E}\right)^{-1}$ mit dem Dämpfungsfaktor k ersetzt, damit in der Nähe von Singularitäten die Invertierbarkeit von $\mathbf{J}_A \mathbf{J}_A^T$ sichergestellt wird.

Der Term $\left(\mathbf{E} - \mathbf{J}_A^\dagger \mathbf{J}_A\right) \dot{\mathbf{q}}_n$ in (2.70) beschreibt nun die Bewegungen des kinematisch redundanten Roboters im Nullraum ohne dass sich dabei die Pose des Endeffektors ändert. Beispielsweise können bei einem 7-Achs-Roboter alle 6 Freiheitsgrade der Pose des Endeffektors fixiert werden, während der gesamte Roboter mit dem Ellenbogen eine

kontinuierliche Bewegung ausführen kann. Diese zusätzliche Bewegungsfreiheit kann nun dazu genutzt werden, um neben der eigentlichen Endeffektorbewegung $\mathbf{x}_{e,d}(t)$ ein zusätzliches (sekundäres) Kriterium bestmöglich zu erfüllen. Zum Beispiel können so die Manipulierbarkeit, der Abstand zu Hindernissen oder die Abstände der Gelenkwinkel zu Gelenkwinkelbeschränkungen maximiert werden. Ein allgemeiner Ansatz für $\dot{\mathbf{q}}_n$ in (2.70) ist

$$\dot{\mathbf{q}}_n = k_0 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} w(\mathbf{q}) \right)^T, \quad k_0 > 0 \quad (2.72)$$

mit der Funktion $w(\mathbf{q})$, welche das Kriterium für die jeweilige Anwendung definiert. Damit bewegt sich der Roboter in Richtung des Gradienten des Kriteriums $w(\mathbf{q})$ und der Roboter versucht dieses sekundäre Kriterium *lokal* zu maximieren, während das primäre Ziel der vorgegebenen Endeffektorbewegung $\mathbf{x}_{e,d}(t)$ mit (2.70) erfüllt wird. Um die Manipulierbarkeit (und damit den Abstand zu Singularitäten) zu maximieren, wird $w(\mathbf{q})$ gemäß (2.53) gewählt. Mit

$$w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{i,max} - q_{i,min}} \right)^2 \quad (2.73)$$

werden die Abstände der einzelnen Gelenkwinkel q_i zu den jeweiligen Gelenkwinkelbeschränkungen $q_{i,max}$ und $q_{i,min}$, $i = 1, \dots, n$ maximiert. Weiters bezeichnet \bar{q}_i in Gleichung (2.73) den Mittelwert des Gelenkwinkelbereichs für das Gelenk i .

Mit der gewünschten Bewegung des Endeffektors $\dot{\mathbf{x}}_{e,d}(t)$ als Eingangsgröße kann analog zu (2.55) basierend auf (2.70) eine Schätzgleichung für den kinematisch redundanten Fall in der Form

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{x}}_{e,d} + \left(\mathbf{E} - \mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d) \mathbf{J}_A(\hat{\mathbf{q}}_d) \right) \dot{\mathbf{q}}_n \quad (2.74a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} \quad (2.74b)$$

angegeben werden mit der rechten Pseudoinversen $\mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d)$ und dem Vektor der Geschwindigkeiten im Nullraum $\dot{\mathbf{q}}_n$. Der Beobachter für (2.74) lautet analog zu (2.60) für den kinematisch redundanten Roboter

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d) (\dot{\mathbf{x}}_{e,d} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{e}}_x) + \left(\mathbf{E} - \mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d) \mathbf{J}_A(\hat{\mathbf{q}}_d) \right) \dot{\mathbf{q}}_n \quad (2.75a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} \quad (2.75b)$$

mit $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$, $k_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Sowohl der Schätzer (2.74) als auch der Beobachter (2.75) für den kinematisch redundanten Fall lassen sich entsprechend (2.57) zeitdiskret implementieren.

2.4.3 Höhere Ableitungen

Mithilfe der beiden vorgestellten Beobachter (2.60) und (2.75) kann eine vorgegebene Bewegung des Endeffektors $\mathbf{x}_{e,d}(t)$ in den zugehörigen zeitlichen Verlauf im Konfigurationsraum $\mathbf{q}_d(t)$ für einen kinematisch nicht-redundanten bzw. redundanten Roboter

umgerechnet werden. Die Beobachter liefern dabei eine Schätzung für die Position $\hat{\mathbf{q}}_d(t)$ und die Geschwindigkeit $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_d(t)$ im Konfigurationsraum. Viele modellbasierte Regelungskonzepte, Trajektorien- und Pfadplanungsalgorithmen benötigen aber zusätzlich auch die Beschleunigungen im Konfigurationsraum $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_d(t)$. Daher wird im Folgenden ein Beobachter zweiter Ordnung hergeleitet.

Der Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen im Konfigurationsraum und im Arbeitsraum wird als Zeitableitung von (2.33) gemäß

$$\ddot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} . \quad (2.76)$$

gefunden. Für kinematisch nicht-redundante Roboter lässt sich die analytische Manipulator Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_A(\mathbf{q})$ außerhalb von Singularitäten invertieren und es folgt die Schätzgleichung für die Beschleunigungen im Konfigurationsraum

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_A^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_d)\left(\ddot{\mathbf{x}}_{e,d} - \dot{\mathbf{J}}_A(\hat{\mathbf{q}}_d, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_d)\dot{\hat{\mathbf{q}}}_d\right) \quad (2.77a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} , \quad \dot{\hat{\mathbf{q}}}_d(0) = \dot{\mathbf{q}}_{d,0} . \quad (2.77b)$$

Nun lässt sich der Beobachter

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_A^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_d)\left(\ddot{\mathbf{x}}_{e,d} + \mathbf{K}_1\dot{\hat{\mathbf{e}}}_x + \mathbf{K}_0\hat{\mathbf{e}}_x - \dot{\mathbf{J}}_A(\hat{\mathbf{q}}_d, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_d)\dot{\hat{\mathbf{q}}}_d\right) \quad (2.78a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} , \quad \dot{\hat{\mathbf{q}}}_d(0) = \dot{\mathbf{q}}_{d,0} , \quad (2.78b)$$

mit dem Schätzfehler $\hat{\mathbf{e}}_x$ nach (2.58) und dessen Zeitableitung $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_x$ nach (2.59) sowie den diagonalen Verstärkungsmatrizen mit positiven Einträgen $\mathbf{K}_0 = \text{diag}(k_{0,1}, k_{0,2}, \dots, k_{0,m})$ und $\mathbf{K}_1 = \text{diag}(k_{1,1}, k_{1,2}, \dots, k_{1,m})$ anschreiben. Wird dieser Beobachter (2.78) in (2.76) eingesetzt, so folgt die Fehlerdynamik zu

$$\ddot{\hat{\mathbf{e}}}_x + \mathbf{K}_1\dot{\hat{\mathbf{e}}}_x + \mathbf{K}_0\hat{\mathbf{e}}_x = \mathbf{0} , \quad (2.79)$$

bzw.

$$\ddot{\hat{e}}_{x,j} + k_{1,j}\dot{\hat{e}}_{x,j} + k_{0,j}\hat{e}_{x,j} = 0 , \quad j = 1, \dots, m , \quad (2.80)$$

welche mit $k_{0,j} > 0$, $k_{1,j} > 0$, $j = 1, \dots, m$ asymptotisch stabil ist.

Wie in Abschnitt 2.4.2 vorgestellt wurde, kann auch der Beobachter zweiter Ordnung (2.78) mithilfe einer Projektionsmatrix $(\mathbf{E} - \mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d)\mathbf{J}_A(\hat{\mathbf{q}}_d))$ für kinematisch redundante Roboter in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d)\left(\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_1\dot{\hat{\mathbf{e}}}_x + \mathbf{K}_0\hat{\mathbf{e}}_x - \dot{\mathbf{J}}_A(\hat{\mathbf{q}}_d, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_d)\dot{\hat{\mathbf{q}}}_d\right) + (\mathbf{E} - \mathbf{J}_A^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_d)\mathbf{J}_A(\hat{\mathbf{q}}_d))\ddot{\mathbf{q}}_n \quad (2.81a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_d(0) = \mathbf{q}_{d,0} , \quad \dot{\hat{\mathbf{q}}}_d(0) = \dot{\mathbf{q}}_{d,0} , \quad (2.81b)$$

erweitert werden. Die Beschleunigungen im Nullraum in (2.81a) werden analog zu (2.72) gemäß

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = k_0 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} w(\mathbf{q}) \right)^\top , \quad k_0 > 0 , \quad (2.82)$$

mit einem (anwendungsspezifisch gewählten) sekundären Kriterium $w(\mathbf{q})$ berechnet.

2.5 Literatur

- [3.1] W. Kemmetmüller und A. Kugi, *Skriptum zur VU Modellbildung (SS 2020)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2020. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/bachelor/modellbildung/>.
- [3.2] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani und G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, London, 2009.