

# 3 Trajektorienplanung

Die Bewegung eines Roboters bzw. eines allgemeinen Starrkörpersystems als Funktion der Zeit wird als *Trajektorie* bezeichnet. Eine Trajektorie kann sowohl die gesamte Roboterbewegung im Konfigurationsraum als Funktion  $\mathbf{q}(t)$  als auch die Endeffektorbewegung im Arbeitsraum mit  $\mathbf{x}_e(t)$  beschreiben. Bei manchen Anwendungen ist die Trajektorie des Roboters vollständig durch die zu lösende Aufgabe vorgegeben, wenn beispielsweise der Endeffektor einem Objekt folgen soll. Häufig wird aber auch nur eine Start- und Zielkonfiguration oder eine Start- und Zielpose für eine Roboterbewegung vorgegeben und die Bewegung zwischen diesen Punkten im Konfigurations- bzw. Arbeitsraum kann frei gewählt werden. Die Aufgabe der *Trajektorienplanung* ist es nun, Trajektorien zu berechnen welche folgende Anforderungen erfüllen:

- Die Trajektorie muss eine hinreichend glatte Funktion der Zeit sein, damit sie durch das Starrkörpersystem mit den vorhandenen Aktuatoren bzw. den unterlagerten Regelkreisen ausgeführt werden kann.
- Die physikalischen Beschränkungen für die Gelenkwinkel und Gelenkwinkelgeschwindigkeiten sowie die Beschleunigungen und Drehmomente müssen eingehalten werden.
- Die Berechnung einer Trajektorie kann viel Zeit in Anspruch nehmen, wenn viele Randbedingungen wie Hindernisse im Arbeitsraum oder Zeitoptimalität berücksichtigt werden sollen. Die berechneten Trajektorien müssen hingegen einfach auszuwerten sein, damit dies während der Ausführung in Echtzeit passieren kann.

In diesem Kapitel wird eine allgemeine Trajektorie aus zwei Teilen zusammengesetzt, nämlich einem *Pfad*, also einer rein geometrischen Beschreibung der Bewegung im Konfigurations- oder Arbeitsraum, und einer *Zeitparametrierung*. In den weiteren Abschnitten werden einerseits geradlinige Bewegungen zwischen einem Start- und Zielpunkt berechnet und andererseits Bewegungen mit Zwischenpunkten, sogenannten *Via-Punkten*, geplant.

## 3.1 Pfade und Trajektorien

Ein Pfad  $\mathbf{q}(s)$  ist eine Abbildung des *Pfadparameters*  $s$  auf einen Punkt im Konfigurationsraum des Roboters. Analog kann auch ein Pfad  $\mathbf{x}_e(s)$  im Arbeitsraum des Roboters definiert werden. Dabei wird angenommen, dass  $s = 0$  beim Startpunkt gilt und mit  $s = 1$  der Zielpunkt erreicht wird. Weiters spezifiziert nun die Zeitparametrierung  $s(t)$  den Zeitverlauf von  $s$  und weist jedem Zeitpunkt  $t$  zwischen dem Anfangszeitpunkt  $t = 0$  und

dem Endzeitpunkt  $t = T$  einen Wert zwischen 0 und 1 zu. Damit ist die Zeitparametrierung als Funktion  $s : [0, T] \rightarrow [0, 1]$  definiert.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die Trajektorienplanung im Weiteren für eine skalare Funktion  $x(t)$  vorgestellt. Die folgenden Konzepte können gleichermaßen auf Zeitfunktionen im  $n$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $\mathbf{q}(s)$  und  $m$ -dimensionalen Arbeitsraum  $\mathbf{x}_e(s)$  angewendet werden.

Ein Pfad  $x(s)$  zusammen mit einer Zeitparametrierung  $s(t)$  spezifizieren eine *Trajektorie*  $x(s(t))$  für eine Koordinate im Konfigurations- oder Arbeitsraum. Die zugehörige Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Zeit werden unter Verwendung der Kettenregel gemäß

$$x = x(s(t)) \quad (3.1a)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} \dot{s} \quad (3.1b)$$

$$\ddot{x} = \frac{dx}{ds} \ddot{s} + \frac{d^2x}{ds^2} \dot{s}^2 \quad (3.1c)$$

berechnet.

## 3.2 Geradlinige Pfade

Eine häufige Aufgabe ist es, einen Roboter von einer Konfiguration in eine andere Konfiguration zu bewegen, wobei der Roboter vor und nach der Bewegung im Stillstand sein soll. Diese Art der Bewegung wird *Punkt-zu-Punkt-Bewegung* (engl. *point-to-point motion*, PTP) genannt und ist im einfachsten Fall ein geradliniger Pfad im Konfigurationsraum. Dadurch ist es immer möglich, die mechanischen Beschränkungen der Gelenkwinkel  $q_{i,min} \leq q_i \leq q_{i,max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , direkt zu berücksichtigen. Solche geradlinigen Bewegungen sind auch im Arbeitsraum des Roboters möglich und diese werden als *Linearbewegung* (engl. *linear motion*, LIN) bezeichnet. Bei einer Linearbewegung ist hingegen nicht garantiert, dass die Gelenkwinkelbeschränkungen immer erfüllt sind.

Für eine skalare Koordinate  $x$  im Konfigurations- oder Arbeitsraum wird ein geradliniger Pfad  $x(s)$  von einem Startpunkt  $x_0$  zu einem Zielpunkt  $x_1$  mit  $s \in [0, 1]$  in der Form

$$x(s) = x_0 + s(x_1 - x_0), \quad s \in [0, 1] \quad (3.2)$$

mit den Ableitungen, vgl. (3.1)

$$\frac{dx}{ds} = x_1 - x_0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad (3.3b)$$

definiert. Eine geradlinige Bewegung im Konfigurationsraum führt im Allgemeinen *nicht* zu einer geradlinigen Bewegung im Arbeitsraum aufgrund des im Allgemeinen nichtlinearen Zusammenhangs über die Roboterkinematik (1.3) bzw. (1.4). Dies soll im Folgenden anhand des Beispiels eines 2-Achs-Roboters gezeigt werden.

**Beispiel 3.1 (Geradlinige Pfade eines 2-Achs-Roboters).** In diesem Beispiel sollen geradlinige Pfade für einen 2-Achs-Roboter sowohl im Konfigurationsraum als auch im Arbeitsraum geplant werden. Der 2-Achs-Roboter mit den Gelenkwinkeln  $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2]$  und den Abmessungen  $d_1$  und  $d_2$  ist in Abbildung 3.1a dargestellt. Die Gelenkwinkel sind mechanisch mit  $0^\circ \leq q_1 \leq 180^\circ$  und  $0^\circ \leq q_2 \leq 150^\circ$  beschränkt. Der Startpunkt des Pfades ist  $\mathbf{q}_0^T = [q_{0,1} \ q_{0,2}]$  und der Endpunkt wird mit  $\mathbf{q}_1^T = [q_{1,1} \ q_{1,2}]$  bezeichnet.

**Konfigurationsraum** Im Konfigurationsraum werden geradlinige Pfade in der Form (3.2) für jedes Gelenk einzeln geplant, d. h.

$$\mathbf{q}(s) = \begin{bmatrix} q_1(s) \\ q_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0,1} + s(q_{1,1} - q_{0,1}) \\ q_{0,2} + s(q_{1,2} - q_{0,2}) \end{bmatrix}, \quad s \in [0, 1], \quad (3.4)$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{q}_0 + s(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0), \quad s \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

In den Abbildungen 3.1b und 3.1c ist der durch die Gelenkwinkelbeschränkungen zulässige Konfigurationsraum bzw. Arbeitsraum als hellgraue Fläche dargestellt. In Abbildung 3.1b ist der geradlinige Pfad zwischen den Punkten  $\mathbf{q}_0$  und  $\mathbf{q}_1$  ersichtlich. Im Gegensatz dazu entsteht durch diese geradlinige Bewegung im Konfigurationsraum eine kurvige Bewegung im Arbeitsraum, siehe Abbildung 3.1c.

**Arbeitsraum** Mithilfe der Vorwärtskinematik des 2-Achs-Roboters

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} d_1 \cos(q_1) + d_2 \cos(q_1 + q_2) \\ d_1 \sin(q_1) + d_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

werden zunächst der Start- und der Endpunkt  $\mathbf{q}_0$  bzw.  $\mathbf{q}_1$  in den Arbeitsraum gemäß

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0) = [x_{0,1} \ x_{0,2}]^T \quad (3.7)$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{q}_1) = [x_{1,1} \ x_{1,2}]^T \quad (3.8)$$

übertragen. Analog zu (3.2) wird nun im Arbeitsraum ein geradliniger Pfad für den Endeffektor  $\mathbf{x}_e(s)$

$$\mathbf{x}_e(s) = \begin{bmatrix} x_{e,1}(s) \\ x_{e,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,1} + s(x_{1,1} - x_{0,1}) \\ x_{0,2} + s(x_{1,2} - x_{0,2}) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 + s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \quad s \in [0, 1], \quad (3.9)$$

geplant. Um diese Bewegung auszuführen, kann einerseits der Beobachter in Abschnitt 2.4.1 verwendet werden. Damit wird zunächst die Roboterbewegung in den Konfigurationsraum umgerechnet und anschließend kann diese mithilfe

eines Reglers im Konfigurationsraum (siehe Abschnitt 1.3.1) ausgeführt werden. Andererseits kann die Regelung auch im Arbeitsraum erfolgen (siehe Abschnitt 1.3.2) und der Pfad (3.9) zusammen mit einer geeigneten Zeitparametrierung  $s(t)$  kann direkt im geschlossenen Regelkreis vorgegeben werden.

Der geradlinige Pfad im Arbeitsraum des 2-Achs-Roboters ist in Abbildung 3.1e dargestellt, während der zugehörige kurvige Pfad im Konfigurationsraum in Abbildung 3.1d zu sehen ist. In beiden Darstellungen ist deutlich zu sehen, dass der geplante Pfad den Arbeitsbereich des Roboter verlässt und die untere Gelenkwinkelbeschränkung von  $q_1$  verletzt wird. Dies zeigt, dass besonders bei der Pfadplanung im Arbeitsraum auf die Einhaltung der mechanischen und physikalischen Beschränkungen der Gelenkwinkel, -geschwindigkeiten und -beschleunigungen geachtet werden muss.

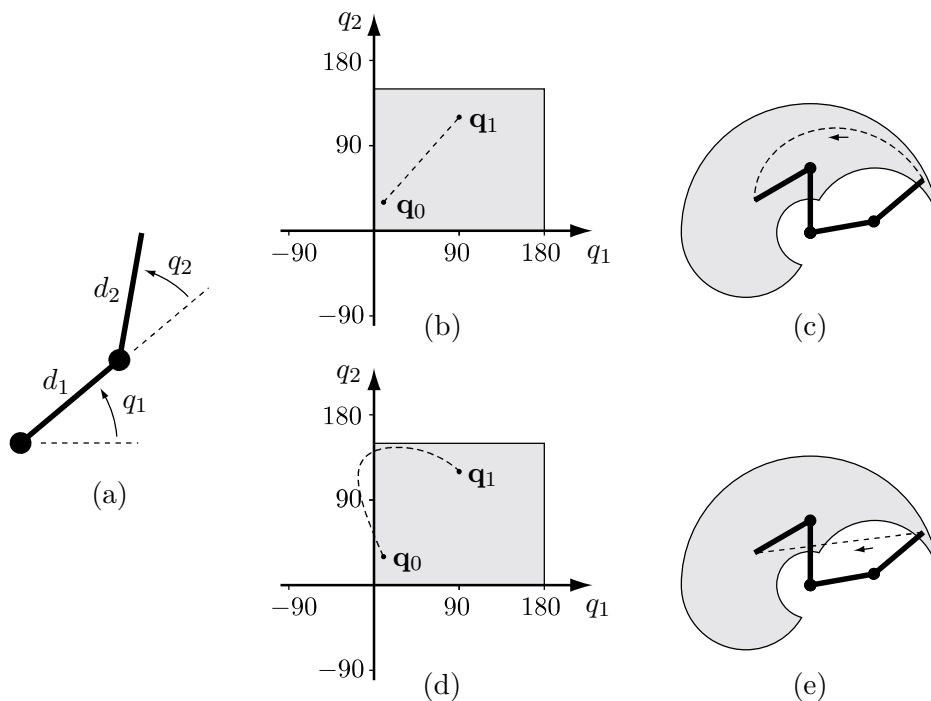


Abbildung 3.1: Geradlinige Pfade eines 2-Achs-Roboters: (a) Roboterkinematik und Gelenkwinkel, (b) geradliniger Pfad im Konfigurationsraum, (c) zugehöriger kurviger Pfad im Arbeitsraum, (d) kurviger Pfad im Konfigurationsraum welcher aus einem geradlinigen Pfad im Arbeitsraum resultiert, (e) geradliniger Pfad im Arbeitsraum, welcher die Gelenkwinkelbeschränkungen verletzt [3.1].

### 3.3 Zeitparametrierung

Durch die Zeitparametrierung  $s(t)$  eines Pfades  $x(s)$  entsteht eine Trajektorie  $x(s(t))$ . Die Zeitparametrierung  $s(t)$  gibt nun den zeitlichen Verlauf vom Anfangszeitpunkt  $t = 0$  mit  $s(0) = 0$  bis zum Endzeitpunkt  $t = T$  mit  $s(T) = 1$  vor. Durch die Wahl von  $s(t)$  kann sichergestellt werden, dass die Roboterbewegung hinreichend glatt parametrisiert wird und auch die Beschränkungen für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung aller Gelenke eingehalten werden.

Mit einer allgemeinen Zeitparametrierung  $s(t)$  ergibt sich aus (3.1) für den geradlinigen Pfad (3.2) mit (3.3) die Trajektorie

$$x = x_0 + s(x_1 - x_0) \quad (3.10a)$$

$$\dot{x} = \dot{s}(x_1 - x_0) \quad (3.10b)$$

$$\ddot{x} = \ddot{s}(x_1 - x_0) . \quad (3.10c)$$

Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Zeitparametrierungen  $s(t)$  vorgestellt. Einerseits wird eine Zeitparametrierung mithilfe von Polynomen 3. und 5. Ordnung konstruiert, mit welchen bestimmte Anfangs- und Endbedingungen erfüllt werden. Andererseits wird in der zweiten Methode eine Bewegung intuitiv durch ein trapezförmiges Geschwindigkeitsprofil bestehend aus einer Beschleunigungsphase, einer Phase konstanter Geschwindigkeit und einer Verzögerungsphase (Bremsphase) beschrieben.

#### 3.3.1 Polynom 3. Ordnung

Für die Zeitparametrierung mithilfe eines Polynoms 3. Ordnung in der Form

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (3.11a)$$

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \quad (3.11b)$$

können insgesamt 4 Randbedingungen vorgegeben werden, um die vier Koeffizienten  $a_0, \dots, a_3$  zu bestimmen. Für die Punkt-zu-Punkt-Bewegung entlang eines geradlinigen Pfades wird nun gefordert, dass der Roboter zu Beginn ( $t = 0$ ) bei  $s(0) = 0$  im Stillstand  $\dot{s}(0) = 0$  startet und nach einer vorgegebenen Zeit  $t = T$  bei  $s(T) = 1$  wieder zum Stillstand kommt, d. h.  $\dot{s}(T) = 0$ . Aus diesen Bedingungen folgen die Koeffizienten gemäß

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{T^2}, \quad a_3 = -\frac{2}{T^3} . \quad (3.12)$$

Die Trajektorie (3.10) zusammen mit (3.11) und (3.12) ist damit vollständig spezifiziert und in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt. Aus (3.11b) wird der Zeitpunkt  $t = T/2$  bestimmt, bei dem die maximale Geschwindigkeit

$$|\dot{x}_{max}| = \frac{3}{2T} |x_1 - x_0| \quad (3.13)$$

auftritt, siehe (3.10b) Die maximale Beschleunigung ist

$$|\ddot{x}_{max}| = \frac{6}{T^2} |x_1 - x_0| , \quad (3.14)$$

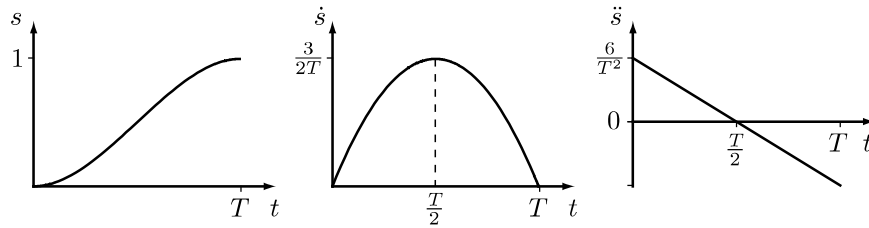


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Funktionen  $s(t)$ ,  $\dot{s}(t)$  und  $\ddot{s}(t)$  für die Zeitparametrierung mithilfe eines Polynoms 3. Ordnung [3.1].

welche bei  $t = 0$  und  $t = T$  auftritt. Diese einfachen analytischen Zusammenhänge erlauben es, die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbeschränkungen des Roboters bei einer vorgegebenen Endzeit  $T$  zu überprüfen. Umgekehrt kann die schnellstmögliche Roboterbewegung berechnet werden, indem  $T$  aus (3.13) bzw. (3.14) berechnet wird.

Beim Polynom 3. Ordnung ist nur die erste Ableitung  $\dot{s}$  stetig, während die zweite Ableitung  $\ddot{s}$  bereits bei  $t = 0$  und  $t = T$  springt. Daher eignet sich dieser Ansatz nur für die Vorgabe einer Geschwindigkeit, aber nicht für die Vorgabe einer Beschleunigung. Weiters haben alle polynomialen Ansätze die Eigenschaft, dass die maximale Geschwindigkeit nur an einem Zeitpunkt erreicht wird und sie eine lange Beschleunigungs- und Verzögerungsphase aufweisen. Damit wird die Leistungsfähigkeit des Robotersystems nicht optimal ausgenutzt. Diese nachteiligen Eigenschaften werden durch trapezförmige Bewegungsprofile behoben, wie in Abschnitt 3.3.3 gezeigt wird.

### 3.3.2 Polynom 5. Ordnung

Wird die Zeitparametrierung als Polynom 5. Ordnung in der Form

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (3.15a)$$

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \quad (3.15b)$$

$$\ddot{s}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \quad (3.15c)$$

gewählt, so können im Vergleich zum Polynom 3. Ordnung noch zusätzlich die zweite Ableitung am Anfang und am Ende der Roboterbewegung mit  $\ddot{s}(0) = \ddot{s}(T) = 0$  vorgegeben werden. Aus diesen Bedingungen werden die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_5$  des Polynoms (3.15a) gemäß

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{10}{T^3}, \quad a_4 = -\frac{15}{T^4}, \quad a_5 = \frac{6}{T^5} \quad (3.16)$$

berechnet. In der schematischen Darstellung in Abbildung 3.3 ist ersichtlich, dass die zweite Ableitung  $\ddot{s}(t)$  nun ebenfalls bei Null beginnt und endet. Damit ist diese Zeitparametrierung geeignet, um Beschleunigungen für die Bewegungen eines Robotersystems vorzugeben.

### 3.3.3 Trapezförmige Bewegungsprofile

Bei den trapezförmigen Bewegungsprofilen weist die erste Ableitung der Zeitparametrierung  $\dot{s}(t)$  oder die Geschwindigkeit der Trajektorie  $\dot{x}(t)$  einen trapezförmigen Verlauf auf, wie

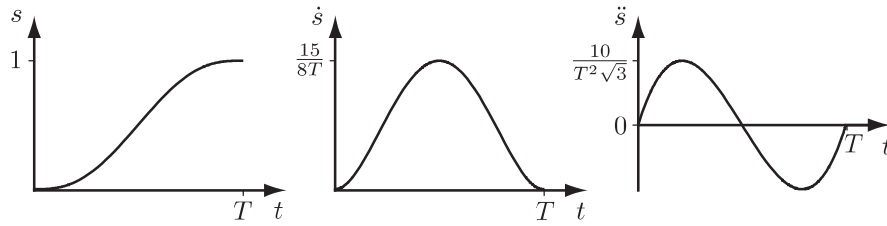


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung der Funktionen  $s(t)$ ,  $\dot{s}(t)$  und  $\ddot{s}(t)$  für die Zeitparametrierung mithilfe eines Polynoms 5. Ordnung [3.1].

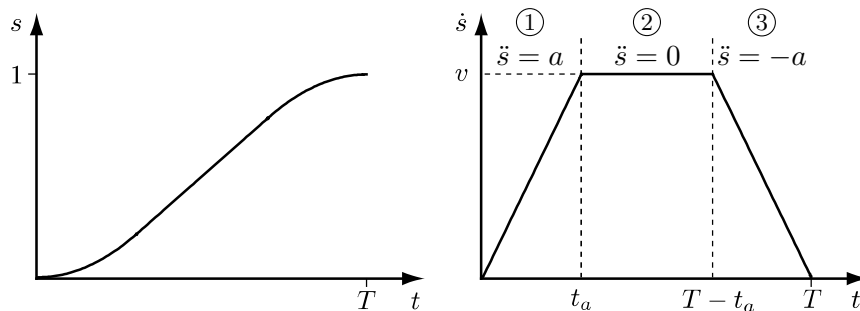


Abbildung 3.4: Zeitparametrierung mit trapezförmigen Bewegungsprofil: ① Beschleunigungsphase, ② Phase konstanter Geschwindigkeit  $v$ , ③ Verzögerungsphase [3.1].

Abbildung 3.4 zeigt. Trapezförmige Bewegungsprofile bestehen aus drei Phasen, nämlich einer Beschleunigungsphase ①, einer Phase konstanter Geschwindigkeit ② und einer Verzögerungsphase ③. Das zugehörige Beschleunigungsprofil lautet daher

$$\ddot{s}(t) = \begin{cases} a & 0 \leq t < t_a \\ 0 & t_a \leq t < T - t_a \\ -a & T - t_a \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.17)$$

und durch einmalige Integration folgt das Geschwindigkeitsprofil zu

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} at & 0 \leq t < t_a \\ v & t_a \leq t < T - t_a \\ a(T - t) & T - t_a \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (3.18)$$

wobei in (3.17) und (3.18) die Geschwindigkeit  $v = at_a$  und die Beschleunigungs- und Verzögerungszeit  $t_a$  eingeführt wurde. Nochmalige Integration liefert die Zeitparametrierung

$s(t)$  in der Form

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}at^2 & 0 \leq t < t_a \\ vt - \frac{v^2}{2a} & t_a \leq t < T - t_a \\ vT - \frac{v^2}{a} - \frac{a}{2}(T-t)^2 & T - t_a \leq t \leq T \\ vT - \frac{v^2}{a} & \text{sonst .} \end{cases} \quad (3.19)$$

Das trapezförmige Bewegungsprofil bietet den Vorteil, dass die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbeschränkungen des Roboters optimal ausgenutzt werden können. Aus (3.17) und (3.18) eingesetzt in (3.10) lassen sich die Parameter  $v$  und  $a$  aus der maximalen Geschwindigkeit  $\dot{x}_{max}$  und der maximalen Beschleunigung  $\ddot{x}_{max}$  in der Koordinate  $x$  in der Form

$$|v(x_1 - x_0)| \leq \dot{x}_{max} \quad (3.20)$$

$$|a(x_1 - x_0)| \leq \ddot{x}_{max} \quad (3.21)$$

bestimmen.

Die geradlinige Trajektorie (3.10) mit dem trapezförmigen Bewegungsprofil (3.17)–(3.19) wird durch die drei Variablen  $v$ ,  $a$  und  $T$  parametrisiert. Es können aber nur zwei davon unabhängig gewählt werden, denn es wird die Bedingungen  $s(T) = 1$  gefordert. Die Beschleunigungs- und Verzögerungszeit ist mit  $t_a = v/a$  festgelegt. Werden beispielsweise die Geschwindigkeit  $v$  und die Beschleunigung  $a$  vorgegeben – unter der Bedingung  $v^2/a \leq 1$ , sodass alle drei Phasen des Bewegungsprofils vorhanden sind – so ergibt sich aus der Bedingung  $s(T) = 1$  die erforderliche Zeitdauer  $T$  für die Trajektorie zu

$$T = \frac{1}{v} + \frac{v}{a} . \quad (3.22)$$

Weiters können auch durch Vorgabe von  $v$  und  $T$  die erforderliche Beschleunigung  $a$  bestimmt werden und wenn  $a$  und  $T$  vorgegeben wird, kann die zugehörige Geschwindigkeit  $v$  berechnet werden.

Das trapezförmige Bewegungsprofil mit 3 Phasen weist allerdings den gleichen Nachteil auf wie die Zeitparametrierung mittels eines Polynoms 3. Ordnung, nämlich die Unstetigkeit der Beschleunigung. Um Vibrationen und Schwingungen im Robotersystem zu minimieren, wird meist die Änderungsrate der Beschleunigung, der sogenannte *Ruck* (engl. *jerk*), beschränkt. Analog zur Zeitparametrierung mit einem Polynom 5. Ordnung (siehe Abbildung 3.3) kann auch ein trapezförmiges Bewegungsprofil mit 7 Phasen konstruiert werden, welches diese Aufgabe erfüllt, siehe Abbildung 3.5. Anstatt sprunghaft die maximale Beschleunigung  $a$  aufzuschalten, wird die Beschleunigung linear mit beschränktem Ruck hoch- und heruntergefahren.

### 3.4 Trajektorien mit Via-Punkten

Die bisher vorgestellten Methoden erlauben es lediglich eine Punkt-zu-Punkt-Bewegung mit einem geradlinigen Pfad zu planen. Häufig ist aber die Aufgabe eines Roboters, eine



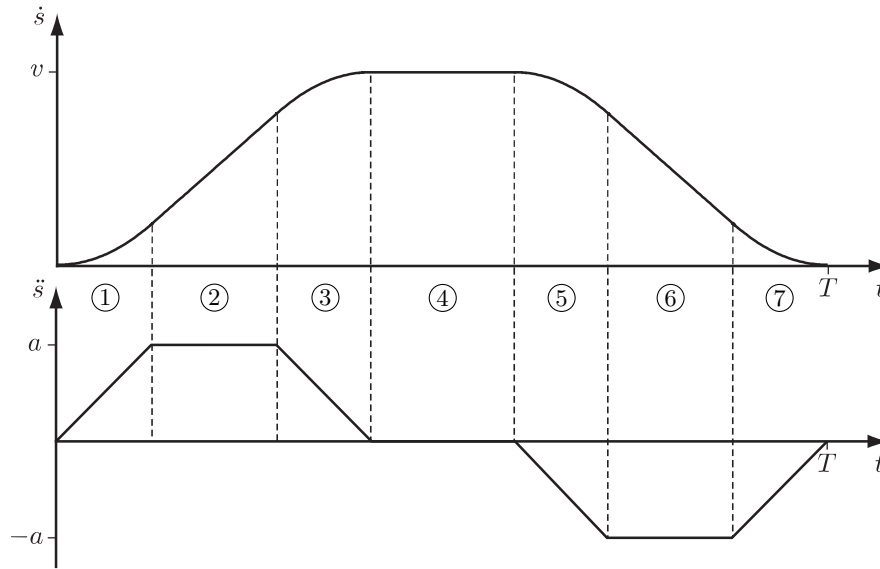


Abbildung 3.5: Zeitparametrierung für trapezförmiges Bewegungsprofil mit 7 Phasen: ① Hochfahren der Beschleunigung, ② konstante Beschleunigung  $a$ , ③ herunterfahren der Beschleunigung, ④ konstante Geschwindigkeit  $v$ , ⑤ hochfahren der Verzögerung, ⑥ konstante Verzögerung  $-a$ , ⑦ herunterfahren der Verzögerung [3.1].

Bahn mit mehreren Zwischenpunkten, den sogenannten *Via-Punkten*, abzufahren. Im einfachsten Fall können dazu eine Reihe von polynomialen Trajektorien verwendet werden, welche an den Via-Punkten mit Stetigkeitsbedingungen verbunden werden. Im Folgenden wird eine Methode für Polynome 3. Ordnung vorgestellt mit welcher eine Trajektorie  $x(t)$  direkt geplant wird, also ohne expliziter Zeitparametrierung  $s(t)$ .

Die gesuchte Trajektorie  $x(t)$  wird anhand der Positionen  $x(t_i) = x_i$  zu den Zeitpunkten  $t_i$  sowie den Geschwindigkeiten  $\dot{x}(t_i) = \dot{x}_i$  für alle Via-Punkte  $i = 0, \dots, N-1$  spezifiziert. Dabei sind  $t_0 = 0$  und  $t_{N-1} = T$  der Anfangs- und Endzeitpunkt dieser Trajektorie. Zwischen den  $N$  Via-Punkten liegen  $N-1$  Trajektoriensegmente mit den Laufzeiten  $T_i = t_{i+1} - t_i$ ,  $i = 0, \dots, N-2$ . Jedes Trajektoriensegment  $i$  wird als Polynom 3. Ordnung in der Form

$$x(t_i + \Delta t) = a_{i0} + a_{i1}\Delta t + a_{i2}\Delta t^2 + a_{i3}\Delta t^3 \quad (3.23)$$

angesetzt, wobei  $\Delta t$  die verstrichene Zeit innerhalb des Segments bezeichnet mit  $0 \leq \Delta t \leq T_i$ . Die Anfangs- und Endwerte jedes Trajektoriensegmentes werden nun anhand der vier Bedingungen gemäß

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x_i & \dot{x}(t_i) &= \dot{x}_i \\ x(t_i + T_i) &= x_{i+1} & \dot{x}(t_i + T_i) &= \dot{x}_{i+1} \end{aligned}$$

vorgegeben, sodass die Übergänge zwischen zwei aufeinanderfolgenden Trajektoriensegmenten  $i$  und  $i+1$  einen stetigen Positions- und Geschwindigkeitsverlauf aufweisen. Aus diesen Bedingungen werden die Koeffizienten  $a_{i0}, \dots, a_{i3}$  der Polynome  $i = 0, \dots, N-1$

gelöst und lauten

$$a_{i0} = x_i \quad (3.24a)$$

$$a_{i1} = \dot{x}_i \quad (3.24b)$$

$$a_{i2} = \frac{3x_{i+1} - 3x_i - 2\dot{x}_iT_i - \dot{x}_{i+1}T_i}{T_i^2} \quad (3.24c)$$

$$a_{i3} = \frac{2x_i + (\dot{x}_i + \dot{x}_{i+1})T_i - 2x_{i+1}}{T_i^3} . \quad (3.24d)$$

**Beispiel 3.2 (Trajektorie mit Via-Punkten).** In diesem Beispiel soll die Methode aus Abschnitt 3.4 anhand einer konkreten Trajektorie gezeigt werden. Die Trajektorie  $x(t)$  soll  $N = 4$  Via-Punkte mit den Zeitpunkten  $t_i$  passieren sowie die zugehörigen Positionen  $x_i$  und Geschwindigkeiten  $\dot{x}_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , gemäß

$t_0 = 0 \text{ s}$	$x(t_0) = x_0 = 0$	$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = 0$
$t_1 = 1 \text{ s}$	$x(t_1) = x_1 = 0$	$\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1 = 1$
$t_2 = 2 \text{ s}$	$x(t_2) = x_2 = 1$	$\dot{x}(t_2) = \dot{x}_2 = 0$
$t_3 = 3 \text{ s}$	$x(t_3) = x_3 = 1$	$\dot{x}(t_3) = \dot{x}_3 = 0$

aufweisen. Mit diesen Vorgaben werden die  $N - 1 = 3$  Trajektoriensegmente als Polynome 3. Ordnung in der Form (3.23) mit den Koeffizienten (3.24) und den vorgegebenen Positionen und Geschwindigkeiten berechnet. Es ergibt sich die zusammengesetzte Trajektorie mit Via-Punkten  $x(t)$  und die zugehörige Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  welche in Abbildung 3.6 dargestellt ist.

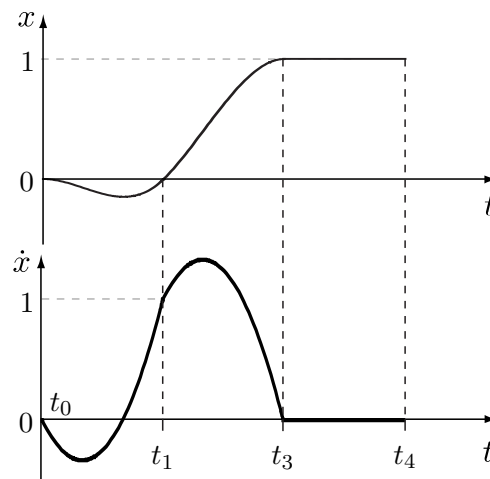


Abbildung 3.6: Zusammengesetzte Trajektorie mit Via-Punkten  $x(t)$  mit zugehöriger Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  [3.1].

### 3.5 Literatur

- [3.1] K. M. Lynch und F. C. Park, *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017. Adresse: <http://hades.mech.northwestern.edu/images/7/7f/MR.pdf>.

