Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

Formelsammlung zum Skriptum Modellbildung

Version vom 22. Juni 2020

Polarkoordinaten

$$x(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t)\sin(\varphi(t))$$

Kugelkoordinaten

$$x(t) = r(t)\sin(\theta(t))\cos(\varphi(t)), \quad y(t) = r(t)\sin(\theta(t))\sin(\varphi(t)), \quad z(t) = r(t)\cos(\theta(t))$$

Resultierende Kraft in einem zentralen Kräftesystem

$$\mathbf{f}_R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i$$

Drehmoment:

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y f_z - z f_y \\ z f_x - x f_z \\ x f_y - y f_x \end{bmatrix}$$

Resultierendes Moment bezüglich des Punktes A

$$\boldsymbol{\tau}_R^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i^{(A)}$$

Masse eines Starrkörpers

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Schwerpunkt eines zusammengesetzten Körpers

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{r}_{Sj} m_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} m_j}$$

Impulserhaltung einer Punktmasse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f}$$

Impulserhaltung für Körper mit veränderlicher Masse

$$m(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mu\mathbf{w}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m = -\mu$$

Drehimpulserhaltung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{l}^{(0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}^{(0)}$$

Massenträgheitsmoment
Verschiebung in einen allgemeinen Aufpunkt A (Satz von Steiner):

$$I_{zz}^{(A)} = I_{zz}^{(S)} + m\left(\left(x_S^{(A)}\right)^2 + \left(y_S^{(A)}\right)^2\right)$$

Dissipative Kräfte

Körper in Fluid:	$f_D\mathbf{e}_v = -c_W A \frac{\rho_f}{2} v^2 \mathbf{e}_v$	Widerstandsbeiwert $c_W > 0$
Haftreibung:	$f_H = \mu_H f_N$	Haftreibungskoeffizient $\mu_H > 0$
Trockene Gleitreibung:	$f_C = \mu_C f_N \operatorname{sign}(\dot{x})$	Gleitreibungskoeffizient $\mu_C > 0$
Rollwiderstand:	$f_R = \mu_R f_V$	Rollreibungskoeffizient $\mu_R > 0$
Viskose Reibung:	$f_r = \mu_V \Delta v$	viskoser Reibungskoeffizient $\mu_V > 0$
Seilreibung:	$f_{S2} = f_{S1} \exp(\mu\alpha)$	Haftreibungskoeffizient $\mu = \mu_H > 0$

Elementare Drehmatrizen

$$\mathbf{R}_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{R}_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Kombinierte Rotation und Translation

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1$$

Homogene Transformation

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}_0^1 \in SO(3)$$

Schiefsymmetrische Matrix S zur Berechnung der Drehwinkelgeschwindigkeit

$$\mathbf{S} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Manipulator Jacobi-Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_k^l \\ \boldsymbol{\omega}_k^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_\mathbf{v})_k^l(\mathbf{q}) \\ (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_k^l(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_k^l(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

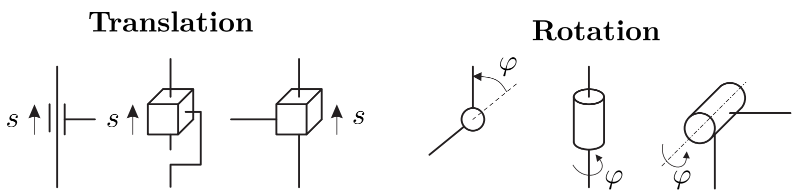
Translatorischer Anteil

$$\mathbf{v}_k^l = \dot{\mathbf{d}}_k^l(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_j = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) & \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) & \dots & \frac{\partial}{\partial q_n} \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{(\mathbf{J_v})_k^l(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}}$$

Rotatorischer Anteil

$$\boldsymbol{\omega}_k^l = (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_k^l(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Symbolische Darstellung von Gelenken



Kinetische Energie
Translatorischer Anteil

$$T_t = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v}_0^S \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_0^S = \frac{1}{2} m \left(\dot{\mathbf{p}}_0^S \right)^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{p}}_0^S$$

Rotatorischer Anteil

$$T_r = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\omega}_0^1 \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_0^1$$

Trägheitsmatrix

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{V}} \left(r_y^2 + r_z^2 \right) \mathrm{d}m & -\int_{\mathcal{V}} r_x r_y \mathrm{d}m & -\int_{\mathcal{V}} r_x r_z \mathrm{d}m \\ -\int_{\mathcal{V}} r_x r_y \mathrm{d}m & \int_{\mathcal{V}} \left(r_x^2 + r_z^2 \right) \mathrm{d}m & -\int_{\mathcal{V}} r_y r_z \mathrm{d}m \\ -\int_{\mathcal{V}} r_x r_z \mathrm{d}m & -\int_{\mathcal{V}} r_y r_z \mathrm{d}m & \int_{\mathcal{V}} \left(r_x^2 + r_y^2 \right) \mathrm{d}m \end{bmatrix}$$

Trägheitsmatrix im Inertialsystem

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{I}_1 \left(\mathbf{R}_0^1 \right)^{\mathrm{T}}$$

Potentielle Energie zufolge Gravitation

$$V = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_g^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_0 \mathrm{d}m = -mg \mathbf{e}_g^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_0^S$$

Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L - \frac{\partial}{\partial q_j}L = f_{q,j}^{np}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

Vektor der generalisierten Kräfte

$$\mathbf{f}_{q,\mathbf{f}} = \left((\mathbf{J_v})^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^{\mathrm{e}} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{q,\boldsymbol{\tau}} = \left((\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{e}}$$

Bewegungsgleichungen in Matrixschreibweise

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_q^{np}$$

Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \left((\mathbf{J_v})_0^1\right)^{\mathrm{T}} m(\mathbf{J_v})_0^1 + \left((\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^1\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_0 (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^1$$

Coriolis-Matrix

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_i$$

$$c_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k}\right)$$

Vektor der Potentialkräfte

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) & g_2(\mathbf{q}) & \ldots & g_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \text{mit} \quad g_k(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_k}$$

Einige trigonometrische Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\sin(0) &= 0 & \cos(0) &= 1 & \tan(0) &= 0 \\
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} & \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 2-\sqrt{3} \\
\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\
\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} & \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} \\
\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} & \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} & \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= 2+\sqrt{3} \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 & \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
&\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\
&\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1
\end{aligned}
$$